



Excitations collectives dans la croûte interne des étoiles à neutrons

Luc Di Gallo

► To cite this version:

Luc Di Gallo. Excitations collectives dans la croûte interne des étoiles à neutrons. Phénomènes cosmiques de haute energie [astro-ph.HE]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2011. Français. NNT : 2011PA077220 . tel-00667553

HAL Id: tel-00667553

<https://theses.hal.science/tel-00667553>

Submitted on 7 Feb 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT (Paris 7)
ÉCOLE DOCTORALE
ASTRONOMIE ET ASTROPHYSIQUE D'ÎLE-DE-FRANCE
Doctorat
ASTRONOMIE ET ASTROPHYSIQUE

THÈSE

Luc DI GALLO

EXCITATIONS COLLECTIVES DANS LA CROÛTE INTERNE DES ÉTOILES À NEUTRONS

Thèse dirigée par Micaela OERTEL

Soutenue le 1er Décembre 2011



JURY

Isabelle	Grenier	Présidente
Micaela	Oertel	Directrice de Thèse
Constança	Providência	Rapporteur
Peter	Schuck	Rapporteur
Nicolas	Chamel	Examineur
Francesca	Gulminelli	Examineur
Pierre	Pizzochero	Examineur

Beauté, Sagesse et Savoir,
Le tout en Harmonie.

Je dédie cette thèse à mon père, à ma grand-mère,
et à Camille Cristau qui nous manquent.

Résumé

Nous avons étudié ici une nouvelle forme d'excitation, dite collective, dans la croûte interne des étoiles à neutrons. Dans cette partie de l'étoile, en se structurant, la matière prend des formes aux géométries originales appelées « phase pasta » et dont l'état est superfluide dans des conditions de température caractéristiques des étoiles à neutrons. L'objectif était de décrire des excitations dont les longueurs d'onde varient de la taille de la cellule de Wigner-Seitz à des très grandes valeurs. Ces dernières sont essentielles pour l'étude à basse énergie et représentent l'aspect macroscopique de ce milieu alors que les premières correspondent aux aspects microscopiques de la matière. Pour cela nous avons opté pour une approche fondée sur l'hydrodynamique des superfluides à plusieurs constituants. Ainsi, nous avons pris en compte les propriétés essentielles de la matière nucléaire telles que les vitesses du son. Le modèle que nous avons développé consiste essentiellement en l'étude de la propagation de perturbations à travers ces structures, par rapport à un équilibre hydrostatique. Nous nous sommes penchés sur le cas des structures en forme de plaques uniquement. Pour cela nous avons été conduits à définir des conditions aux bords, afin de modéliser les effets des interfaces. La périodicité du milieu a été prise en compte en utilisant le théorème de Floquet-Bloch. La résolution des équations nous a permis d'obtenir les spectres d'excitations de ces plaques. Nous en avons dégagé les propriétés physiques et nous avons utilisé ces spectres pour le calcul de chaleur spécifique. Ceci nous a permis d'étudier la contribution de ces excitations collectives en les comparant aux autres formes d'excitations possibles. Ainsi nous avons constaté que cette nouvelle contribution était loin d'être négligeable. Elle aura sa place à part entière dans les futurs calculs d'évolution thermique des étoiles à neutrons.

Abstract

We study the spectrum of collective excitations in the inhomogeneous phases in the neutron star inner crust. In that part of the star, the structured matter takes an original shape called « pasta phase » and we expect it to be in a superfluid state. Our aim is to describe the whole range of wavelengths from the long-wavelength limit to wavelengths in the range of dimensions of the Wigner-Seitz cells. The former can be described by macroscopic approaches and is crucial for the low-energy part of the spectrum, while the latter is associated to modes usually described in microscopic calculations. We developed our model using a superfluid hydrodynamical theory allowing several components. This approach takes into account the main properties of nuclear matter through sound velocities for example. Our model consist in studying the propagation of perturbation of the hydrostatic equilibrium through structures with the shape of slabs. The effect of interfaces has been represented by defining boundary conditions and we used the Floquet-Bloch theorem in order to represent the periodicity of the structures. The resolution of equations gave us very interesting excitation spectrum. And as an application, we have discussed the contribution of these collective modes to the specific heat of the « lasagna » phase in comparison with other known contributions.

Remerciements

Cette thèse constitue l'achèvement d'une cursus mais surtout elle participe à l'accomplissement d'un rêve qui a commencé longtemps auparavant. Ce rêve, je l'ai eu lorsque mon père m'a conduit à une conférence en plein air d'Hubert Reeves pour la nuit des étoiles. Ce jour là, alors que j'avais 10 ans, je me suis dit que je deviendrai astrophysicien. Mon père su faire germer cette petite graine de curiosité en moi. C'est ainsi que je tiens à remercier en tout premier lieu mes parents et l'ensemble de la famille sans qui je ne serais pas là. Tout un chacun a su m'apporter son soutien indéfectible en toute circonstance, je vous dois beaucoup et je ne vous remercierai jamais assez.

Plus qu'une expérience scientifique, où je me suis formé à la recherche, cette thèse a été une grande expérience humaine. Il me vient ainsi à l'esprit l'organisation de la conférence Elbereth 2009 qui a été un vrai « challenge » en tant que deuxième édition de cette belle conférence des étudiants en Astronomie et Astrophysique d'Ile-de-France. Je tiens pour cela à remercier l'ensemble de l'équipe organisatrice c'est à dire Yannick Boissel, Nicolas Clerc, Loïc Letiran, Lucie Maquet, Marion Mas, Isabelle Paris, Aurélie Penin, et Thierry Semaan, ainsi que Jacqueline Plancy et Florence Henry. Je pense aussi à ce grand évènement pour l'Astronomie qu'a été l'Année Mondiale de l'Astronomie 2009. Cela a été un grand moment passé en compagnie de Thierry Semaan et d'autres, et dont le point d'orgue a été l'organisation de la mission au Bénin. Je crois que c'est cette mission qui a donné toute sa dimension humaine à ma thèse. Je ne pourrais donc que remercier aussi cette équipe merveilleuse composée de Didier Pelat, Jacqueline Plancy, Irène Balmes, Pascal Gallais, Bernard Talureau, Catherine Boisson, Aude Alapini, Myriam Rodrigues, Adeline Gicquel, Mathieu Brangier, Oscar Kiche, Alexandre Kiche et Pide. Que de grands moments passés,... j'espère qu'on remettra ça !

Le travail au laboratoire a été source de beaucoup de réflexions sur le monde de la recherche aussi. Et mon implication au sein de l'école doctorale m'a permis de prendre un peu de recul sur les conditions des doctorants. C'est ainsi que je remercie Daniel Rouan pour son aide. Je tiens à remercier les membres du Jury qui ont pris soin d'examiner mon travail de thèse. C'est avec reconnaissance et grand respect que je remercie en particulier Constança Providência et Peter Schuck pour leurs remarques et suggestions en tant que rapporteurs.

Je remercie Micaela Oertel qui a acceptée d'être ma directrice de thèse ainsi que l'équipe COSGRA du Luth pour m'avoir accueilli. Je ne manque pas de penser à l'ensemble des membres du Luth actuels et passés, et en particulier aux étudiants, à l'équipe administrative et aux informaticiens. Je remercie surtout Morgane Fortin, Noémie Globus, Bruno Peres et Irène Balmes avec qui j'ai passé de chaleureux moments durant les pauses café. Au passage, je salue David Lépine, Nathalie Ollivier et Stéphane Thomas qui ont fait en sorte que ma thèse se passe au mieux sur un

plan administratif. Je remercie chaleureusement Véronique Cayatte et Christophe Sauty pour toute l'aide qu'ils m'ont apportée durant ces années au Luth.

Puis maintenant je sort de l'observatoire pour ne pas oublier ceux qui ont été présents à mes côtés. Hitrick fait parti ce ceux qui doivent être en premier dans ces remerciements.

Mes anciens colocataires d'Orsay et de Gif, Polo, Lynda, Nico, Philippe, Toto, Charly, Laura, Emile, Julien, Erwan... c'est toujours un plaisir de vous revoir.

♪ Évidemment je ne pourrais oublier ceux qui ont contribué au soupir de la semaine Odile et Daniel Roth ainsi que toute l'équipe de la tribune de St Sulpice, c'est-à-dire Pierre-François, Guy, Stéphane, Christophe, Béatrice, Hubert, Michel.

† Je ne manque pas de saluer Françoise et Jean-Louis Romanet, Fernand Pons, ainsi que leurs frères et sœurs.

Je pense aussi à mes anciens professeurs que je remercie pour avoir participé au développement de mon gout pour les sciences, je pense entre autre à M. Weisz, M. Mathieu, Mme Prevots et M. Allard mais il y en a d'autres aussi.

Les amis et membres des associations que j'ai fréquentées ont droit aussi à mes chaleureuses salutations. Le monde associatif m'a procuré beaucoup de bien, j'y ai appris bien des choses et j'ai donné ce que j'ai pu. Ainsi, j'ai une pensée particulière pour Elisabeth, Micheal, Jémil, Etienne, Patterson, les Éric, Claude, Alexandre et bien d'autres que je ne cite pas.

C'est avec un grand respect que je remercie Jean Derouineau dont les multiples discussions m'ont appris énormément dans d'autres disciplines que la mienne.

Je remercie Jacques Labasque pour ses quelques relectures au café Les Deux Magots en sortant de St Sulpice et Nathalie Ollivier pour nos rigolades, surtout après nos lectures du Bescherelle.

C'est avec douleur que j'ai dû vivre la disparition de ma grand-mère, de mon papa et de Camille Cristau durant cette thèse. Comme si la thèse devait être une épreuve à passer ! C'est donc dans mon coeur maintenant que je garderai le souvenir de ma chère mamie dont la grande gentillesse m'inspirera toujours. Evidemment je dédie aussi cette thèse à mon papa qui dans la souffrance s'est accroché à l'espoir de voir son fils docteur. Je n'oublierai jamais ce qu'il a fait pour moi et c'est pour ça que je me suis accroché aussi ! À Madame Cristau, ma petite mamie chez qui je me suis toujours ressourcé. Maintenant repose en paix, je transmettrai ton message d'amour et de paix :

« N'oubliez jamais de dire "Je t'aime" quand votre cœur vous le demande, car il peut-être trop tard et on le regrette. »

Camille Cristau, *Sérénité* (2010)

Je pense aussi à d'autres personnes chères, Nikita Kovalenko et Monsieur Cristau, tous deux des grands esprits qui m'ont guidé et continueront de le faire tout au long de ma vie.

Table des matières

Introduction	10
Une histoire au XXème siècle	10
Petite description des étoiles à neutrons	13
L'équation d'état, un enjeu majeur d'actualité	17
L'évolution thermique, un des moyens de sonder leur intérieur	21
Modes collectifs dans la croûte des étoiles à neutrons	24
1 Hydrodynamique des superfluides	28
1.1 Théorie des superfluides	29
1.1.1 Condensat de Bose-Einstein	32
1.1.2 Théorie BCS et modèles de superfluides de fermions	34
1.2 Équations de l'hydrodynamique des superfluides à plusieurs consti-	
tuants	37
1.2.1 Lagrangien hydrodynamique	41
1.2.2 Phénomène d'entraînement	42
1.2.3 Courant d'entropie	44
1.2.4 Irrotationalité locale	45
1.2.5 Vortex superfluide	45
1.3 Interactions et hydrodynamique : L'entraînement	46
1.3.1 Interaction effective de type Skyrme	53
1.3.2 Interaction de type Champ Moyen Relativiste	55
1.4 Modèle à deux composants pour les étoiles à neutrons	59
2 Théorie des modes hydrodynamiques dans la croûte interne des	
 étoiles à neutrons	63
2.1 Perturbation au premier ordre et ondes sonores	64
2.1.1 Le potentiel chimique et ses dérivées	67
2.1.2 Vitesses du son	72
2.2 La croûte interne : la phase « pasta »	75
2.3 Conditions aux bords	81
2.3.1 Modélisation des structures	82
2.3.2 Approximation hydrodynamique	83

2.3.3	Nombre de conditions aux bords	84
2.3.4	Détermination des conditions aux bords	86
2.3.5	Récapitulatif des jeux de conditions aux bords	91
2.4	Modes hydrodynamiques dans les « lasagnes »	95
2.4.1	Propagation des modes hydrodynamiques dans les « lasagnes »	95
2.4.2	Excitations collectives dans les « lasagnes »	114
3	Interprétation physique et exploitation des spectres d'excitations	120
3.1	Spectres d'excitations dans les « lasagnes »	121
3.1.1	Description d'un spectre d'excitation	121
3.1.2	Dépendance du spectre à l'angle de propagation	128
3.1.3	Étude comparative des spectres d'excitations selon les condi- tions aux bords	131
3.1.4	Effet de l'entraînement sur les spectres	138
3.1.5	Spectres d'excitations avec l'interaction SLy4	139
3.1.6	Extrapolation du modèle	144
3.2	Thermodynamique des étoiles à neutrons	147
3.2.1	Contribution des modes hydrodynamiques à la densité d'éner- gie thermique	147
3.2.2	Calcul de chaleur spécifique	149
	Conclusion	154

Introduction

« Les profondeurs du passé et celles de l’avenir restent pour nous plus insaisissables encore que celles de l’espace. Nous sommes dans la situation d’un voyageur qui, à la simple lueur d’un éclair, voudrait reconstituer l’histoire entière d’une cité. »

Ernest Esclangon, *Dix leçons d’Astronomie* (1934)

Une histoire au XXème siècle

« With all reserve we advance the view that a super-nova represents the transition of an ordinary star into a *neutron star*, consisting mainly of neutrons. »

(Baade et Zwicky, 1934 [10])

L’histoire des étoiles à neutrons, en tant qu’objet à proprement parler, a commencé en 1934 par la prédiction géniale de Baade et Zwicky [10]. Cette prédiction théorique, qui est le fruit de l’imagination et de la curiosité des scientifiques, est le résultat d’un cheminement de l’histoire des sciences et de l’évolution des concepts physiques. Ainsi le contexte historique de cette découverte peut être abordé suivant deux aspects des sciences, le premier concerne le domaine de l’astrophysique alors que le second, plus microscopique, concerne la physique de la matière. Si Baade et Zwicky ont proposé ce nouvel objet astrophysique pour expliquer leurs observations d’un phénomène hautement énergétique encore incompris, les supernovae, ils n’évoquent les étoiles à neutrons que pour des arguments d’énergie sans en donner le réel mécanisme physique.

En effet sur le plan astrophysique, les étoiles à neutrons ne venaient pas combler un manque flagrant dans la compréhension des observations astronomiques. À cette époque les deux seules interactions bien maîtrisées étaient la gravitation et l’électromagnétisme, et du point de vue de l’astrophysique, celles-ci gouvernaient l’essentiel de l’univers. On avait bien conscience que lors de la rupture d’un équilibre, la gravitation avait tendance à reprendre le dessus, contractant notamment les étoiles en fin de vie. Mais tout cela était encore loin d’être clairement établi et bien défini dans l’ensemble. La supernova n’apparaissait pas de toute évidence comme la fin de vie d’une étoile et d’ailleurs on ne faisait pas encore bien la distinction entre les divers types de supernovae, mettant sur le même plan celles de type Ia et IIb dont les mécanismes physiques sont en réalité très différents. Les naines, et en particulier les naines blanches, semblaient être le stade final de toute étoile (Nodon [73] et Esclangon [41]). Mais cela n’a rien d’étonnant quand on pense que le diagramme de Hertzsprung-Russell (HR), permettant de classer les étoiles avait

était introduit environ vingt ans plus tôt seulement. Celui-ci permit d'introduire par la suite la notion d'évolution stellaire. Mais comment pouvait-on la comprendre et donner des échelles de temps sans même connaître l'origine précise de la source d'énergie des étoiles ? Pour cela il aura fallu que les travaux de Gamov publiés 1928 [46] soient approfondies en 1938 par Bethe avec la détermination du premier cycle précis de nucléosynthèse stellaire [16] pour que le diagramme HR prenne tout son sens, interprété notamment grâce aux stades d'évolution des étoiles. La prédiction de Baade et Zwicky venait donc se perdre dans toutes ces questions qui agitaient le monde scientifique du moment.

Tout de même Chandrasekhar avait commencé à ébranler l'édifice des positions tenues par les astrophysiciens quant à la fin des étoiles, en introduisant sa fameuse masse limite pour les naines blanches en 1931 [35]. En effet si la naine blanche a ses limites, que faire de celles qui devraient être plus massives ?

On ne se précipita pas malgré tout, immédiatement après la prédiction de 1934, vers les étoiles à neutrons puisque le premier modèle fiable de structure pour ces objets, et quasi seconde fois qu'elles sont évoquées, date de 1939, avec l'introduction des équations de Tolman, Oppenheimer, Volkoff (TOV) [74, 96]. C'est à ce moment là, que la théorie de la relativité générale fait son entrée en scène dans la conception des étoiles à neutrons. Grâce à ces équations TOV, la communauté scientifique voyait apparaître la notion de masse limite pour ces objets en tant qu'effet relativiste pur. Par la suite d'autres articles viendront alimenter les travaux théoriques sur le sujet aiguisant la curiosité des chercheurs et du grand public. Mais cela ne s'est produit qu'au moment où l'origine des sources d'énergies des étoiles commençait à être mieux maîtrisée, où les naines blanches ont eu leur masse limite, où les mécanismes des supernovae ont commencé à être décrits plus précisément, donnant à Baade et Zwicky la position de grands précurseurs.

D'autre part leur intuition s'inscrivait dans le contexte d'un grand chamboulement de la physique de la matière. Puisque seulement deux ans plus tôt Chadwick découvrait l'existence du neutron dans son laboratoire de Cambridge [31]. Cette découverte, qui échappa de peu aux Joliot-Curie, faisait suite à une hypothèse théorique d'une forme de noyaux d'hydrogène électriquement neutre proposée par Rutherford en 1920 [87]. Cette nouvelle particule théorique ouvrait de nombreuses possibilités aux physiciens de la matière. Car notamment l'un des principaux obstacles aux modèles plus ou moins fantaisistes de l'époque, venait de la répulsion des particules électriquement chargées. Ainsi le neutron, en plus d'élucider le problème des nombres atomiques, ouvrait la possibilité de concevoir de la matière toujours plus dense. On peut retrouver ce type de considérations dans l'article de Langer et Rosen [64], intitulé *The neutron* et datant de Mai 1931. Dans celui-ci les auteurs évoquent un type de matière très dense constituée de neutrons qui se concentrent au centre des naines blanches et permettant de dépasser la limite de

densité massique imposée par le principe de Pauli pour une matière chargée électriquement. Il ne restait donc plus qu'un pas à franchir pour arriver aux étoiles à neutrons. C'est donc probablement aussi dans ce contexte de désir du « toujours plus dense » que les chercheurs Baade et Zwicky ont inventé ces objets.

Par la suite la théorie des étoiles à neutrons a continué de se développer, reprenant parfois des découvertes fondamentales de la physique qui pourraient sembler en être éloignées de prime abord. Après les travaux de Tolman, Oppenheimer et Volkoff il restait à trouver une équation d'état de la matière plus réaliste que le simple gaz de neutrons dégénérés. Cette question essentielle ne pouvait être résolue sans une meilleure compréhension de l'interaction nucléaire. Les travaux de Bethe et Weizsäcker [15, 103] ont jeté la première pierre dans ce sens dans les années '30 expliquant par ailleurs l'origine de la masse des noyaux atomiques. La physique nucléaire connut d'immenses progrès dans les décennies qui suivirent, aboutissant dans les années '50 sur des interactions effectives telle que celle issue des travaux de Skyrme [91] par exemple. Ce qui permit à Cameron de publier une des premières synthèses de modèles complets et réalistes d'étoiles à neutrons en 1959 [22]. C'est cette même année que Migdal relia une autre découverte fondamentale de la physique aux étoiles à neutrons en leur affectant des propriétés superfluides [70]. Cet état de la matière, découvert par Kapitza en 1937 [58], puis décrit théoriquement par Landau, Leggett, Migdal et d'autres, en reprenant la théorie de la supraconductivité développée par Bardeen, Cooper et Schrieffer [12], ne semblait pas être un phénomène qui touche le domaine de l'astrophysique. Et pourtant Migdal s'est révélé être un précurseur aussi par sa prédiction puisqu'il verra les premières confirmations de son hypothèse arriver quelques années après.

L'observation directe de ces objets arrivera une trentaine d'années après leur prédiction théorique avec la découverte en 1967 par Hewish et Bell d'un signal radio pulsé extrêmement régulier émis par un pulsar [56]. Leurs observations, relatées dans leur fameux article de *Nature* [56], donnait une limite supérieure au rayon de l'objet source mais ils ne purent conclure sur la nature de l'objet n'excluant pas la possibilité que la source radio puisse être une naine blanche. C'est après quelques mois de forte agitation intellectuelle que la vraie nature de ces sources compactes fut déterminée par Gold [50]. Balayant au passage le modèle en vogue des oscillations radiales de l'objet compact, il donna une explication plus réaliste sur l'origine du signal par la rotation des étoiles à neutrons magnétisées. 1967 sera donc l'année de départ des observations des étoiles à neutrons mettant fin à l'ère de la spéculation théorique pure. C'est ainsi que peu de temps après, les premiers indices de la superfluidité sont apparus à travers les petits sursauts de fréquence dans le mouvement régulier des pulsars, appelés « glitch », avec un mécanisme proposé par Anderson et Itoh faisant appel aux vortex d'un superfluide en rotation [2].

Malheureusement mis à part en onde radio, l’observation des étoiles à neutrons se révélera par la suite être particulièrement difficile. Un contraste flagrant existe entre les mesures extrêmement précises de paramètres physiques tels que la masse ou les paramètres orbitaux des binaires, déduites de l’observation des pulsars, et les tentatives de mesures de paramètres physiques via les observations X ou optiques. Laissant ainsi le champ encore libre à beaucoup de spéculation théorique, ce qui ne saurait déplaire au théoricien comme moi, mais nul ne doute que des contraintes viendront avec les observations X ou optiques en plein développement ou avec de futures découvertes via par exemple les ondes gravitationnelles ou les neutrinos.

Ce bref historique des étoiles à neutrons pourrait être ainsi résumé en évoquant les quelques découvertes fondamentales de la physique du XX^{ème} siècle qui leur sont reliées, c’est-à-dire l’établissement de la théorie de la relativité générale, la découverte du neutron, la prédiction des étoiles à neutrons, la découverte de l’interaction nucléaire, la découverte de la superfluidité et l’observation du premier pulsar.

Petite description des étoiles à neutrons

La suite de cette introduction sera consacrée à un résumé non exhaustif de l’état de l’art concernant les modèles d’étoiles à neutrons pour arriver à une introduction au projet de recherche que j’ai mené durant ma thèse en exposant, dans les grandes lignes, les théories qui m’ont servi. Car une fois le concept d’étoile à neutrons bien admis par la découverte des pulsars, la modélisation de ces objets a pris un essor important, faisant interagir deux nouvelles communautés toujours grandissantes, celles des observateurs de pulsars et celles des modélisateurs d’étoiles à neutrons.

À première vue, une étoile à neutrons est une sphère d’une dizaine de kilomètres dont la masse est comprise entre une à trois fois celle du soleil. De ces deux données nous pouvons déjà déduire à quel type de physique nous aurons affaire. En effet, prenons un rayon typique de $R = 15$ km et une masse typique de $M = 1.4 M_{\odot}$, sa densité moyenne est $\rho_m = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 0.2 \cdot 10^{15} \text{g.cm}^{-3}$ soit environ 0.79 fois la densité de saturation nucléaire ou densité du noyau atomique. Rien que par cette estimation, nous déduisons que l’une des interactions dominantes sera l’interaction nucléaire, donnant ainsi une idée de sa composition et donc l’origine du nom « étoiles à neutrons ». Par ailleurs, nous pouvons estimer la compacité d’un tel objet afin de mesurer la déviation de la métrique de Schwarzschild par rapport à la métrique de Minkowski ou dit de manière plus simple, pour mesurer les corrections relativistes à apporter à la gravitation newtonienne. Dans ce cas nous obtenons une compacité $\Xi = \frac{GM}{Rc^2} = 0.14$, c’est-à-dire qu’un tel objet ne peut être décrit dans son ensemble sans prendre la relativité générale comme description de la gravitation, ou sinon les erreurs seraient de l’ordre de 14%. Donc physique nucléaire et relativité générale

sont les fondements mêmes de la description des étoiles à neutrons.

Ces valeurs extrêmes ne peuvent s'expliquer que par la formation de ces objets. En effet, lorsque les réactions de fusion thermonucléaire qui ont lieu au cœur des étoiles au moins huit fois plus massives que le soleil s'arrêtent, la matière s'effondre sur elle-même. Cet effondrement, extrêmement rapide, va rencontrer une forme de « résistance » en atteignant le cœur de fer qui se trouve comprimé au point de détruire les structures atomiques et donner de la matière nucléaire. De là, un rebond va naître créant un choc qui entraînera la matière en sens inverse, ce qui donnera la supernova. Si la compression du cœur de fer, d'environ une à trois masses solaires, n'est pas trop grande, il deviendra une étoile à neutrons sinon il deviendra un trou noir. Bien que tout ceci soit expliqué de manière très simplifiée, il est possible maintenant de comprendre l'origine de la masse et du rayon des étoiles à neutrons par le mécanisme de supernova. Ce mécanisme permet aussi d'expliquer les très hautes températures atteintes de l'ordre de 10^{11} K, parce que la matière comprimée n'a pas le temps d'évacuer toute cette chaleur. Il explique bien les très grandes vitesses de rotation, allant de quelques millisecondes à 10 s pour les vieux pulsars. Dans ce cas c'est parce que la matière n'a pas eu le temps et surtout n'a pas eu de moyen efficace pour « évacuer » son moment cinétique. Au passage, le pulsar connu pour être le plus rapide est nommé J1748-2446ad et tourne avec une période $P = 1.397$ ms. Si nous supposons que cette étoile à neutrons a un rayon de $R = 15$ km, la vitesse équatoriale de la matière est d'environ $v = 67\,500\,000$ m.s⁻¹, soit à peu près 0.23 fois la vitesse de la lumière dans le vide ! Enfin un même principe de conservation nous permet de trouver que les champs magnétiques peuvent atteindre des valeurs extrêmes de 10^{15} G dans ces objets compacts, qui dans ce cas sont appelés « magnétars ».

Ces quelques valeurs introductives ont pour objectif de montrer que les étoiles à neutrons sont des objets de l'extrême, offrant, à nous terriens, un moyen de tester des théories de physique fondamentale.

Pour entrer un peu plus dans les détails, nous pouvons représenter de manière schématisée ce que nous savons à l'heure actuelle de la structure des étoiles à neutrons avec la figure suivante (Fig. 1).

Dans le centre, cœur du mystère pour ainsi dire, les densités sont de plusieurs fois la densité de saturation nucléaire et la matière, ainsi que ses états, sont largement inconnus. Concernant sa composition, il en va de la simple matière ordinaire de neutrons, protons et électrons, à la matière exotique de quarks « up », « down » et « étranges » déconfinés, en passant par de la matière ordinaire à laquelle il lui est ajouté des muons, parfois d'autres types de hadrons tels que les mésons π^- ou K^- ..., toute la zoologie de la matière hadronique pourrait y passer à condition que ce soit énergétiquement possible. Les conditions dans la partie interne du cœur sont telles qu'aussi bien l'état solide, que l'état liquide peuvent être envisagés. La seule

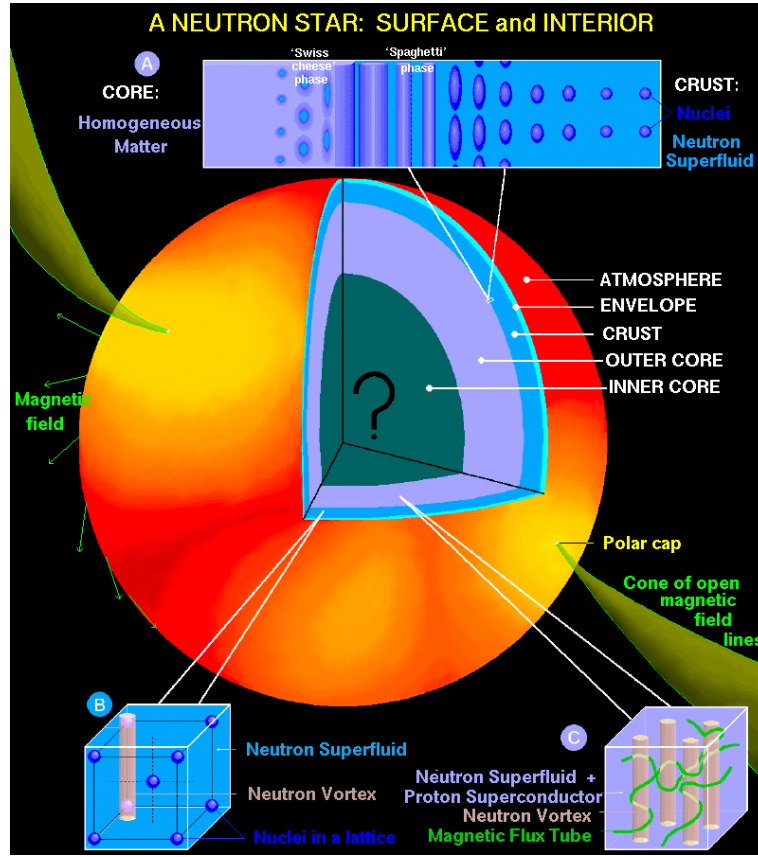


FIG. 1: Structure d'étoile à neutrons (Crédit image : Dany Page).

chose que nous pouvons poser est que cette matière est relativement homogène en dehors d'éventuelles transitions de phases.

Au dessus, à quelques kilomètres du centre, nous trouvons la partie externe du noyau, la matière semble être plus classique, composée très certainement de neutrons, protons et électrons, à l'exception près de théories envisageant un état plus stable de quarks « up », « down » et « étranges » déconfinés qui composerait l'étoile jusqu'à la croûte externe. Ce derniers cas porte le joli nom d'étoile étrange en raison de la présence du quark « étrange ».

Nous venons de présenter le cœur des étoiles à neutrons, il correspond à une fraction non négligeable du rayon selon les modèles d'interaction envisagés, et il contribue pour une majeure partie de la masse de l'étoile. Bien que très peu structurée, de nombreux phénomènes physiques peuvent prendre part dans cette matière qui compose le noyau, tels que la supraconductivité des protons, la superfluidité des neutrons, voir la supraconductivité de couleur pour les quarks, sans

oublier que cette structure est le résultat de l'interaction nucléaire entre particules, dont de nombreux modèles sont proposés. Tous correspondent à des interactions entre nucléons effectives calculées à partir d'expériences nucléaires terrestres, car à l'heure actuelle la Chromodynamique quantique, théorie de l'interaction forte, ne permet pas encore d'obtenir d'équation d'état exploitable.

Ensuite, au-dessus se trouve la croûte, elle même divisée en deux parties, celle interne et celle externe. Elle caractérise l'apparition des premières inhomogénéités dans la matière et il est habituel de la voir débiter à partir d'une densité un peu inférieure à la densité de saturation nucléaire. En dessous de cette densité, l'interaction électromagnétique entre en compétition avec l'interaction nucléaire, multipliant ainsi les possibilités de configurations autorisées.

La croûte interne correspond en particulier à la transition entre la matière homogène dans le cœur et une matière structurée en réseaux dans la croûte externe. C'est dans cette partie que l'on peut trouver les phases dites « pasta » offrant une grande diversité de structures géométriques. Tout d'abord des bulles de gaz de matière moins dense apparaissent dans la matière plus dense dite liquide, puis celles-ci s'allongent à cause de l'interaction électromagnétique jusqu'à dans certains cas se relier entre elles pour former des tubes appelés « spaghetti ». Enfin ces tubes par le même processus peuvent former des plaques appelées « lasagnes ». Puis le processus inverse se produit en continuant de remonter vers la surface sauf que la partie remplissant l'espace correspondra à un gaz de neutrons peu dense et les tubes seront composés de liquide plus dense. De même les bulles précédentes deviendront des gouttes ici plongées dans le gaz de neutrons. Chaque géométrie est choisie en minimisant l'énergie totale en incluant l'énergie de Coulomb et l'énergie nucléaire de surface.

À l'inverse de la partie interne contenant des noyaux riches en neutrons et très déformés, la croûte externe correspond à un réseau cristallin de noyaux plus classiques, ceux plus en profondeur sont évidemment les noyaux lourds et riches en neutrons alors que ceux les plus à l'extérieur sont des noyaux de fer. Dans cette couche, il n'existe plus de neutrons libres car il sont tous confinés dans des noyaux et leur proportion s'approche de celle des protons quand nous allons vers le fer.

Enfin la dernière couche, qui fait seulement quelques centimètres mais qui vient compliquer toutes les observations, est l'atmosphère gazeuse. Elle est composée certainement d'éléments récupérés après la supernova tels que l'hydrogène, l'hélium, ou carbone mais qui peuvent aussi être issus de réactions thermonucléaires à la surface de ces objets...

Sans oublier que toutes ces couches, surtout vers l'extérieur, ne peuvent être décrites correctement sans prendre en compte les champs magnétiques intenses et les hautes températures. Je ne parle pas non plus de la présence de vortex liés à la superfluidité, ni des divers états solide, liquide et gazeux possibles, ni d'un

ensemble d'autres phénomènes, démontrant toute la richesse de la physique de cet objet exotique encore mal connu.

L'équation d'état, un enjeu majeur d'actualité

S'il fallait réunir en un seul ensemble toute la description de ces structures, nous pourrions sans difficulté dire que c'est l'équation d'état. En effet c'est elle qui décrit l'ensemble des propriétés thermodynamiques de la matière en se basant sur des études microphysiques. Et qui, utilisée telle une fonction mathématique de la densité, va fermer le système d'équations décrivant l'équilibre hydrodynamique d'un objet auto-gravitant. L'équation d'état est, en quelque sorte, la matérialisation de l'interface entre l'astrophysique et la physique nucléaire.

En effet à chaque modèle d'interaction nucléaire correspond une équation d'état qui va relier entre eux, la pression, les densités des différentes particules, la température et les potentiels chimiques. Les structures de la matière sont oubliées puisque n'ayant certainement pas d'influence sur celle-ci. Il est usuel de les représenter par une courbe traçant la pression en fonction de la densité baryonique, tout les autres paramètres thermodynamiques restant constants par ailleurs. Dans la figure 2 sont tracées tout un ensemble d'équations d'état dont les noms sont détaillés dans le tableau 1, cette figure et ce tableau sont issus de l'article de Lattimer et Prakash 2001 [66].

TAB. 1: Quelques noms d'équations d'états, « approche » se réfère aux théories utilisées pour les calculs, « composition » se réfère au composants liés à l'interaction forte (n = neutron, p= proton, H = hyperon, K = kaon, Q = quark), tous les modèles prennent en compte la contribution des leptons, Lattimer et Prakash 2001 [66].

Symbole	Référence	Approche	Composition
FP	Friedman & Pandharipande (1981)	Variationnelle	np
PS	Pandharipande & Smith (1975)	Potentiel	$n\pi^0$
WFF(1-3)	Wiringa, Fiks & Fabrocine (1988)	Variationnelle	np
AP(1-4)	Akmal & Pandharipande (1998)	Variationnelle	np
MS(1-3)	Müller & Serot (1996)	Théorie des champs	np
MPA(1-2)	Müther, Prakash & Ainsworth (1987)	Dirac-Brueckner HF	np
ENG	Engvik et al. (1996)	Dirac-Brueckner HF	np
PAL(1-6)	Prakash, Ainsworth & Lattimer (1988)	Schéma de potentiel	np
GM(1-3)	Glendenning & Moszkowski (1991)	Théorie des champs	npH
GS(1-2)	Glendenning & Schaffner-Bielich (1999)	Théorie des champs	npK
PCL(1-2)	Prakash, Cooke & Lattimer (1995)	Théorie des champs	npHQ
SQM(1-3)	Prakash, Cooke & Lattimer (1995)	Matière de quarks	Q (u, d, s)

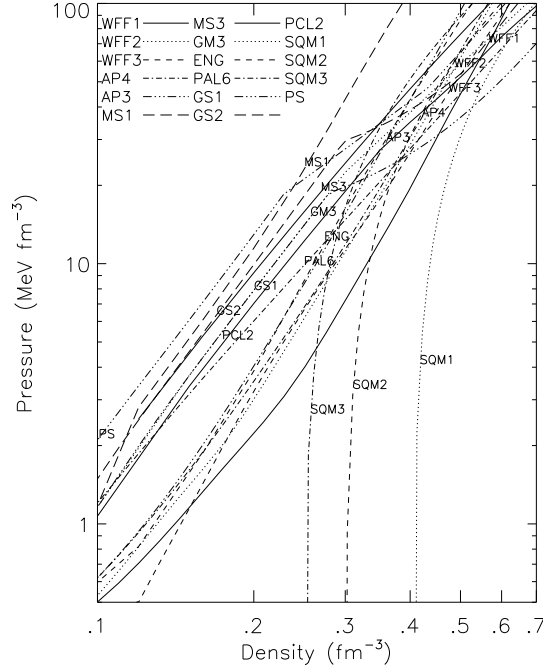


FIG. 2: Pression en fonction de la densité pour plusieurs équations d'état sélectionnées. Le pression est donnée en $\text{MeV} \cdot \text{fm}^{-3}$ et la densité baryonique en fm^{-3} . Figure issue de Lattimer et Prakash 2001 [66].

Il est possible d'utiliser ces équations d'état pour intégrer les équations de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) qui permettront d'obtenir un objet sphérique, statique, décrit dans le cadre de la relativité générale. À chaque équation d'état correspond une collection d'étoiles à neutrons de caractéristiques différentes, telles que la masse et le rayon, variant avec les conditions initiales telles que la densité au centre. D'ailleurs la signature d'une équation d'état en terme d'étoile à neutrons est souvent représentée sous forme de diagramme masse-rayon. Dans la figure 3 sont représentés les diagrammes masse-rayon (M-R) pour quelques unes des équations d'état définies auparavant [66]. Nous pouvons remarquer que mis à part aux points d'intersections entre les courbes, en théorie une seule mesure astrophysique de masse, de rayon et de vitesse angulaire suffisamment précise permettrait de contraindre fortement le type d'équation d'état possible, si ce n'est la déterminer complètement. Malheureusement, bien que la masse des étoiles à neutrons soit une observable relativement accessible grâce à l'observation des binaires contenant un pulsar, nous savons que le rayon reste encore une observable difficilement atteignable. Il faut comprendre que l'enjeu est de taille car une telle

observation pourrait permettre de comprendre la matière nucléaire et comment elle se comporte, notamment dans des conditions qui ne seront certainement jamais atteintes avec des expériences terrestres.

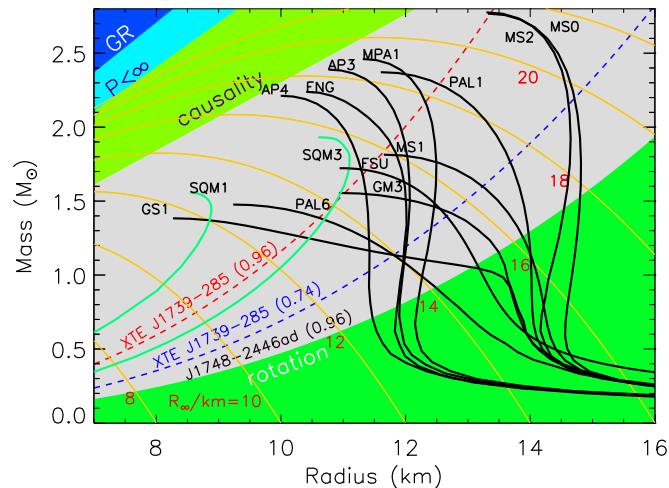


FIG. 3: Diagramme masse-rayon pour quelques équations d'état présentées ci-dessus, Lattimer et Prakash 2001 [66].

Des efforts très importants sont fait dans ce sens en développant toujours les théories d'interactions, en tentant de mesurer quelques paramètres via des expérience sur des noyaux, mais aussi en développant les observations astronomiques. Les ondes gravitationnelles lors de la coalescence de binaires contenant une étoile à neutrons serait un moyen idéal, mais pour l'heure des instruments tels que VIRGO ou LIGO ne le permettent pas. Des observations telles que les sursauts avec expansion radiale de l'atmosphère ont montré que l'on pouvait commencer à déduire un début d'information sur la masse et le rayon. En effet lorsque l'étoile accrete de la matière depuis un compagnon, il arrive à un certain point que le gaz accumulé « s'embrace » dans une réaction thermonucléaire, créant un phénomène très lumineux qui est observé en rayons X. Si nous connaissons la distance de cet objet à nous, la modélisation d'un tel phénomène permet de déduire quelques caractéristiques de l'objet. Pour l'instant ce type d'étude en est encore à son balbutiement mais quelques hypothèses encore grossières, telles que supposer un flux lumineux égal à celui d'Eddington, permettent d'obtenir une densité de probabilité donnant la masse et le rayon. Dans la figure 4 issue de Steiner & al. [93], nous pouvons re-

trouver ce type de densité de probabilité calculée à partir d'observation de sursauts de type I.

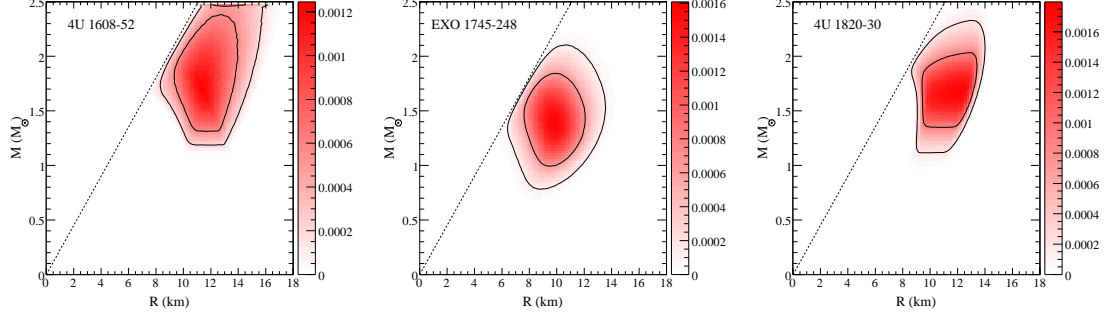


FIG. 4: Densité de probabilité donnant la masse et le rayon obtenu avec l'observation de 3 bursts de type I, Steiner & al. [93].

Par la suite il est possible de remonter jusqu'aux propriétés de la matière en combinant toutes ces observations. Ainsi, grâce à des méthodes statistiques et un algorithme de Monte Carlo, les équations TOV ont été inversées pour obtenir une densité de probabilité donnant l'équation d'état comme le montre la figure 5. Pour

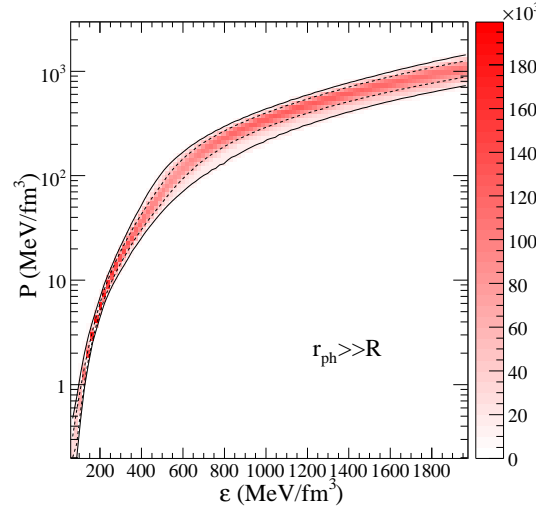


FIG. 5: Densité de probabilité obtenue avec une méthode de Monte Carlo donnant la pression en fonction de la densité d'énergie pour les évènements donnés dans Steiner & al. [93].

l'instant nous ne pouvons déduire seulement que ce résultat est compatible avec

les autres équations d'états de la physique nucléaire sans donner de contraintes plus fortes. Mais nous remarquerons que c'est en poursuivant de tels efforts entre observateurs et théoriciens que les mystères de la matière se révéleront petit à petit.

L'évolution thermique, un moyen de sonder leur intérieur

Comme nous l'avons vu précédemment, c'est en multipliant les observations de catégories différentes que nous pourrions contraindre de mieux en mieux les théories. L'une d'elle est l'observation du spectre d'émission thermique de l'atmosphère des étoiles à neutrons isolées.

Si l'étoile à neutrons est isolée, donc épargnée par de nombreux phénomènes physiques liés notamment à d'éventuelles accrétions de matière qui pourraient brouiller les observations, l'une des sources de perte d'énergie sera l'émission thermique. Ainsi, quand il est possible d'obtenir un spectre du rayonnement de l'étoile, nous avons accès à sa température de surface via des modèles d'atmosphère. Cette information essentielle permet déjà de mieux comprendre ces objets, mais pour pouvoir exploiter au mieux cette information une donnée temporelle est nécessaire. Pour cela plusieurs moyens sont à notre disposition, l'âge de l'objet étudié peut être donné de manière très précise si sa formation peut être associée à une supernova, autrement il faut utiliser des modèles donnant l'âge indirectement. La mesure de la vitesse d'expansion de la nébuleuse issue de la supernova permet d'estimer la date de l'événement. Si l'objet est observé en tant que pulsar en ondes radio, le rapport $P/2\dot{P}$, où P est la période de rotation, donne un ordre de grandeur de son âge en supposant qu'il est un dipôle magnétique en rotation perdant toute son énergie de rotation en ondes électromagnétiques. Et dans le cas de Cassiopee A, il a même été possible de voir son évolution thermique au cours de dix ans de campagnes d'observations en X sur cet objet avec le satellite Chandra. Sur la figure 6, issue de Heinke et al. 2010 [55], sont représentés les spectres de cet objet pris à plusieurs moments entre 2000 et 2009.

Ces points permettent d'ajuster un modèle d'atmosphère contenant du carbone et de déduire la température de surface. Ainsi dans ce cas nous pouvons voir que sa température de surface, d'environ 2.10^6 K, a diminuée de 4 % au cours de ces dix dernières années. Ceci n'a été possible que parce que cet objet est à une distance proche de 3.4 kpc, donc relativement lumineux dans le ciel, et surtout très jeune puisque son âge est estimé à 330 ans, donc refroidissant très rapidement. L'exploitation de tels résultats permet de donner des contraintes sur les modèles d'évolution thermique d'étoile à neutrons. Ces modèles doivent prendre en compte les corrections relativiste, comme nous l'avons vu précédemment. Les équations décrivant le transport de chaleur en relativité sont établies depuis 1977 grâce aux travaux de Thorne [95] et en dehors des potentiels gravitationnels, les

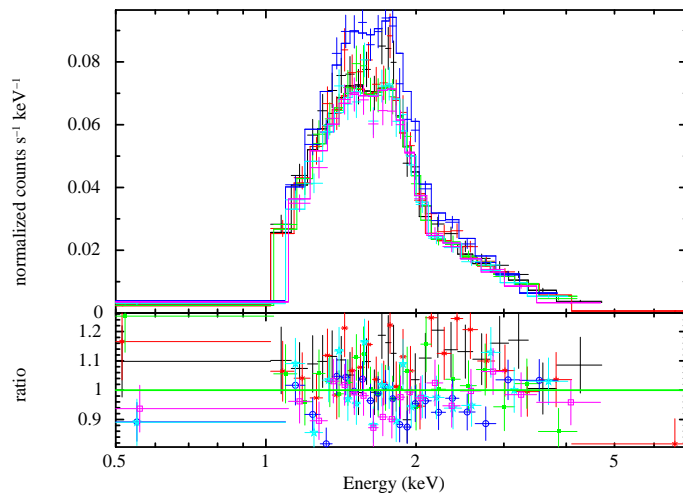


FIG. 6: Spectres d’observation en X par Chandra de l’étoile à neutrons Cassiopée A à différents moments entre 2000 et 2009, Heinke et al. 2010 [55]. Le code de couleur est noir = 2000, rouge = 2002, vert = 2004, bleu = 2006, cyan = 2007, magenta = 2009.

coefficients qui entrent dans ces équations sont l’émissivité de neutrinos, la chaleur spécifique et la conductivité thermique. Ce sont ces paramètres qui forment l’identité thermique de la matière à une densité donnée en fonction de sa température, de sa composition, de ses états, de sa structuration. Ces paramètres sont les ingrédients essentiels pour simuler l’évolution thermique d’une étoile à neutrons de masse donnée. Cette évolution est donc le résultat d’un ensemble de processus microphysiques qui ont lieu dans toutes les parties de l’étoile et qui ne peuvent être séparés facilement à partir des observations. Cette confrontation entre théorie et observations peut être illustrée avec la figure 7, où plusieurs modèles d’évolutions pour deux masses d’étoile sont tracés en même temps que onze objets observés sont placés avec leurs barres d’erreur. Il faut noter que la température à l’intérieur peut dépasser la température de surface de plusieurs ordre de grandeur [106].

Ici aussi les observations laissent place encore à beaucoup d’incertitudes sur les propriétés de la matière, mais ne perdons pas espoir car c’est en regroupant toutes ces sources d’informations que ces incertitudes seront réduites. Franchissons pas à pas ces étapes et l’une d’elle, très importantes, a été passée grâce à l’analyse des spectres de Cassiopée A dont nous avons parlé. Un article de Page et al. [77] et un de Shternin et al. [89], publiés quasi simultanément au début de l’année 2011 sont arrivés à la même conclusion. En substance, leur résultat est qu’une pente décroissante en température aussi grande ne peut être interprétée que par un état superfluide des neutrons comme nous le montre la figure 8. Grâce

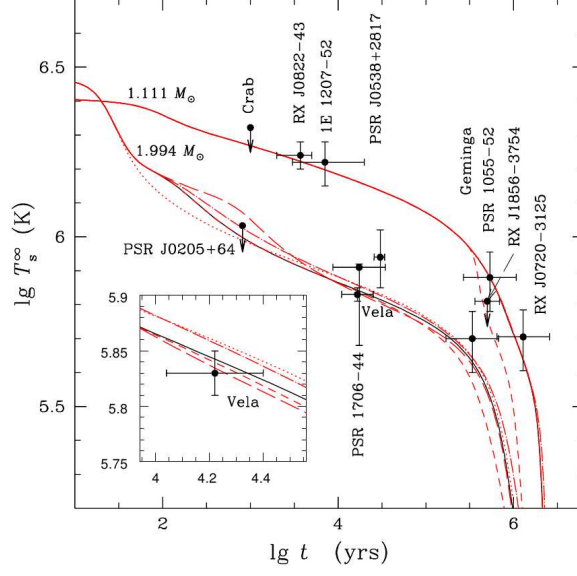


FIG. 7: Plusieurs courbes de refroidissement donnant la température de surface qui serait observée à l'infini en fonction du temps avec les quelques points mesurés., Gusakov et al. 2004 [52]

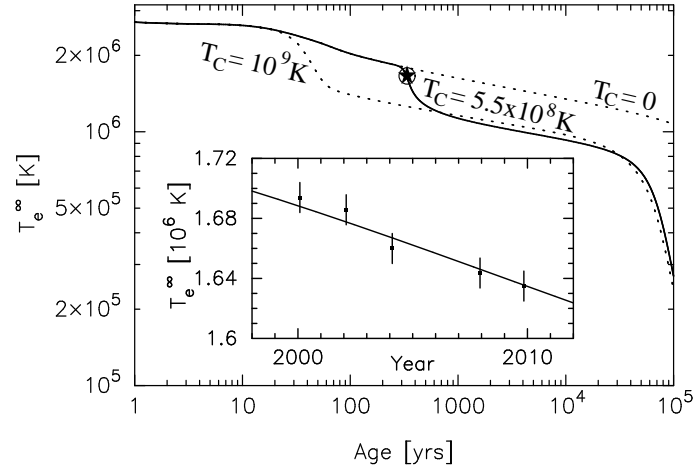


FIG. 8: Ajustement de la courbe de refroidissement avec les points observés sur Cassiopée A, Page et al. 2011 [77].

à cette observation un ordre de grandeur de la température critique d'appariement des neutrons superfluides peut être donné. Il faut remarquer que sans une bonne

connaissance des propriétés thermiques de la matière et un bon modèle, cette découverte n'aurait pas été possible. Nous n'oublierons pas non plus de citer aussi les alternatives à ce processus lié à la superfluidité telle que déjà proposée par Blascke et al. [17] pour garder à l'esprit que rien n'est acquis en science et qu'il faut rester ouvert. Il paraît donc essentiel de développer les études théoriques de ces objets pour pouvoir être en mesure d'interpréter les futures observations à la lueur des bons phénomènes physiques. Seulement il n'est pas évident de savoir a priori dans quelle direction aller, comment savoir quel sera le prochain paramètre déterminant dans un modèle confronté aux observations. Ainsi dans le cas que nous venons de décrire, les observations n'ont pas permis de déterminer la masse de l'objet mais plutôt un état de la matière. Dans le domaine des études d'évolution thermique, les propriétés de la croûte sont fondamentales, notamment parce que la plupart des modèles semblent indiquer que le cœur se refroidit plus vite par émission de neutrinos que la croûte, qui par la suite peut réchauffer le cœur. Elles sont importantes aussi lors d'épisodes d'accrétion de matière sur la surface. Cette matière en tombant, chauffe les couches externes et lorsque cet épisode s'arrête, un refroidissement par émission thermique particulièrement lumineux à la surface est observé sur des périodes de l'ordre de l'année. Ces échelles de temps caractéristiques de refroidissement ne permettent de sonder que l'extérieur de l'étoile, car ce phénomène a lieu essentiellement dans ces parties de l'étoile [21, 44]. Ce sont ces raisons qui nous montrent qu'il est primordial de bien connaître les propriétés thermiques de la croûte.

Modes collectifs dans la croûte des étoiles à neutrons

Dans ce dernier paragraphe de l'introduction nous présenterons le projet de thèse que j'ai mené, les motivations pour lesquelles j'ai travaillé sur ce sujet et enfin nous décrirons les parties de ce manuscrit.

Comme nous venons de voir précédemment, nous nous concentrerons sur les propriétés thermiques des étoiles à neutrons et en particulier sur la chaleur spécifique, appelée aussi capacité calorifique. Celle-ci permet de définir la quantité d'énergie nécessaire à apporter au système pour augmenter sa température. Cette quantité qui dépend elle-même de la température est la somme de toutes les contributions possibles dans un état thermodynamique donné du système. Chaque contribution correspond à un type d'excitation thermique de la matière, ainsi l'énergie thermique se répartira sur l'ensemble des excitations possibles. Sur la figure 9 tirée de Fortin et al. [44] sont représentés plusieurs contributions possible à la chaleur spécifique, à la température $T = 10^9$ K, en fonction de la densité. Les séparations verticales représentent la limite entre les couches de l'étoile, c'est-à-dire entre le cœur et la croûte interne et puis avec la croûte externe.

Dans le cœur, où la matière est homogène, chaque constituant est associé à une

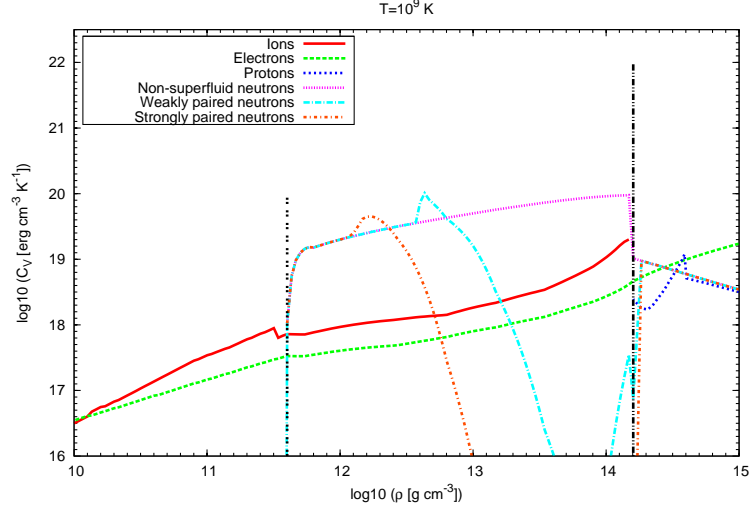


FIG. 9: Répartition des contributions à la chaleur spécifique en fonction de la densité à $T = 10^9$ K , Fortin et al. 2010 [44].

contribution à la chaleur spécifique. Sur la figure 9 sont représentées les contributions des électrons en tant que gaz de Fermi dégénéré et les contributions des neutrons et des protons en interaction. Contrairement au cœur, la croûte interne présente de nombreux effets intéressants. Tout d'abord nous pouvons constater que la contribution des protons est supprimée, car ceux-ci sont regroupés dans les noyaux atomiques riches en neutrons. Ce sont ces noyaux qui vont maintenant entrer en jeu sous forme d'excitations du réseau qu'ils forment dans le fluide de neutrons, et leur participation à la chaleur spécifique est loin d'être négligeable selon la densité. Les électrons continuent de jouer leur rôle en tant que gaz de Fermi mais sont moins contributeurs que le réseau d'ions. Les neutrons, eux, sont les grands gagnants de la « partie » car l'appariement lié à la superfluidité va rendre leur contribution largement supérieure dans la partie à faible densité de la croûte interne. Mais cette forte contribution est compensée par contre par la disparition de cet effet sur la chaleur spécifique à plus haute densité. Il faut comprendre que via l'interaction d'appariement, les neutrons forment des paires qui peuvent être plus ou moins cassées en grand nombre selon la température pour former un équilibre entre neutrons appariés et neutrons libres. Chaque fois qu'une paire se forme, elle libère une quantité d'énergie égale à l'énergie de liaison des paires et devient en quelque sorte « superfluide ». Ce qui fait que la matière lorsqu'elle est proche de la température de transition entre fluide normale et superfluide, dite température critique T_c , elle libère une quantité d'énergie importante pour chaque degré kelvin

en moins. Puis une fois complètement liée pour des températures un peu dessous de T_c , la matière de neutrons ne contribue quasiment plus à la chaleur spécifique et peut être considérée superfluide dans son ensemble. Sachant que cette température critique dépend entre autre de la densité, dans la croûte interne celle-ci devient de l'ordre de quelques 10^9 K dans les parties à haute densité comme le montre la figure suivante 10 tirée de [76]. Ceci explique la disparition de la contribution des neutrons à haute densité dans la croûte interne et à des températures habituelles pour des étoiles à neutrons.

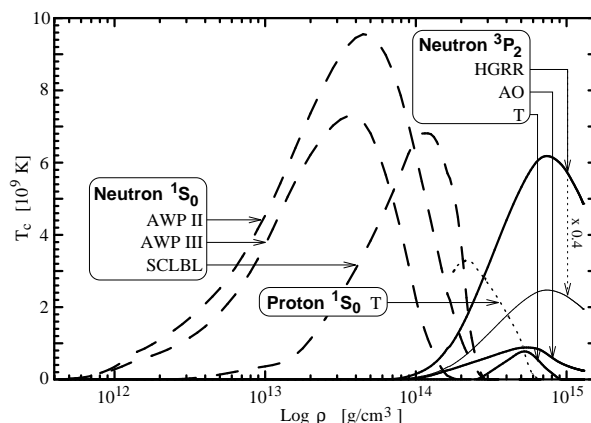


FIG. 10: Quelques exemples de température critique en fonction de la densité pour plusieurs modèles d'appariement des neutrons, tirée de [76].

Enfin dans la croûte externe les neutrons tout comme les protons sont regroupés en noyaux, la chaleur spécifique se répartissant maintenant entre gaz dégénéré d'électrons et excitations du réseau de noyaux.

Suite à ce que nous venons de dire, les effets de la superfluidité des neutrons feront l'objet d'une attention toute particulière puisqu'elle sera un des fondements de mon projet de thèse. En effet, alors que les neutrons forment des paires les rendant superfluides dans la croûte interne et donc ne participant pas à la chaleur spécifique, un autre type d'excitation, non encore étudiée dans ce cas, de la matière superfluide semble prendre part. Les superfluides, tels que les neutrons ici, sont des liquides quantiques qui peuvent être excités de manière collective, ce sont des modes à basse énergie. De telles excitations collectives ont été étudiées théoriquement et observées dans de nombreux systèmes, allant des fluides quantiques [63, 68] aux systèmes à plusieurs corps tels que les noyaux atomiques [42, 86]. Prie individuellement chaque paire ne peut être excitée mais comme l'ensemble de ces paires est cohérent localement pour des raisons quantiques, elles peuvent être excitées de manière groupées, tel un ensemble d'atomes formant une chaîne

moléculaire peut vibrer dans son ensemble. Ces excitations pourraient ainsi contribuer substantiellement à la chaleur spécifique et donc restaurer la suppression des neutrons superfluides observée sur la figure 9.

Un moyen d’approcher le traitement de ce comportement collectif des neutrons et protons est de considérer ces constituants comme des fluides et de les décrire à l’aide de l’hydrodynamique des superfluides à deux constituants. Ce sera l’objet du chapitre 1 qui suit. Dans cette partie nous nous consacrerons à présenter le formalisme de l’hydrodynamique des superfluides à deux composants. Nous commencerons par une description de ses origines théoriques, puis nous développerons les équations générales que nous utiliserons. Ensuite nous ferons le lien entre l’hydrodynamique et les divers types d’interactions nucléaires en abordant à ce moment là les calculs des paramètres entrant en jeu. Et enfin nous définirons le cadre d’application de ces équations dans le cas qui nous intéresse, c’est-à-dire celui des étoiles à neutrons.

C’est dans le chapitre 2 que nous introduirons ce que sont ces excitations collectives, en particulier nous développerons tout le formalisme théorique nécessaire à leur compréhension. Comme nous nous intéresserons aux modes présents dans la croûte interne, nous présenterons plus précisément comment se structure la matière en adoptant des formes géométriques originales regroupées sous le nom de « phase pasta ». Nous définirons donc comment se comportent ces modes hydrodynamiques dans ces structures et ensuite cela nous amènera à introduire le problème crucial des conditions aux bords. Nous terminerons ce chapitre par le développement d’un modèle théorique de propagation de ces modes à travers ces structures et surtout nous donnerons les équations permettant de calculer ces excitations.

Dans le chapitre 3 nous donnerons les résultats numériques issus de la résolution des équations développées dans le chapitre précédent. Nous ferons ici une analyse précise des spectres d’excitations que nous aurons obtenus. Et nous ferons aussi une étude comparative de ces spectres en fonction de l’ensemble des paramètres sur lesquels nous pouvons jouer. Pour finir nous reviendrons à notre motivation première en appliquant les résultats précédents au calcul des chaleurs spécifiques dans le chapitre. Pour cela nous commencerons par donner quelques précisions sur les modèles d’évolution thermique. Et enfin nous aborderons le calcul de cette contribution et nous l’analyserons à la lueur des interprétations physique possibles.

Chapitre 1

Hydrodynamique des superfluides

Art :

« [...] Si l'objet s'exécute, la collection et la disposition technique des règles selon lesquelles il s'exécute, s'appellent *Art*. Si l'objet est contemplé seulement sous différentes faces, la collection et la disposition technique des observations relatives à cet objet s'appellent *Sciences* ; ainsi la *Métaphysique* est une science, et la *Morale* est un *art*. [...] »

Diderot, *Encyclopédie* (1751)

Sommaire

1.1	Théorie des superfluides	29
1.2	Équations de l'hydrodynamique des superfluides à plusieurs constituants	37
1.3	Interactions et hydrodynamique : L'entraînement . . .	46
1.4	Modèle à deux composants pour les étoiles à neutrons	59

Dans ce projet, pour décrire les phénomènes collectifs produit par les neutrons et les protons dans la matière nucléaire j'ai choisi une approche hydrodynamique. Car pour traiter le comportement macroscopique d'un grand ensemble de particules dans l'état gazeux ou liquide il est plus simple d'utiliser l'hydrodynamique. Ce qui permet ainsi d'assimiler les fluides à un milieu continu et ainsi réduire le problème à quelques équations différentielles. Dans notre cas particulier, sachant que les températures considérées seront inférieures à la température critique de l'ordre de $5 \cdot 10^9$ K, nous aurons affaire à des superfluides.

1.1 Théorie des superfluides

Dans la nature, la matière peut être classée en plusieurs catégories appelées « états » selon le degré de cohérence qu'elle présente et il est d'usage de prendre pour classification les états solide, liquide et gazeux. En théorie l'interaction entre tous les constituants de la matière va l'organiser de telle sorte qu'à une température donnée elle se trouve dans un état défini. Mais concrètement le nombre de particules, leur nature, l'éventuelle multiplicité des interactions vient rendre extrêmement complexe le traitement exact du système. Ainsi pour déterminer dans quel état se trouve une certaine matière considérée, nous aurons recours à la thermodynamique sous-jacente à la physique statistique. Cette discipline ne traite pas de manière exacte chaque particule d'un système mais a pour vocation de déterminer les propriétés globales du système en tirant parti du fait que le système est constitué d'un très grand nombre de particules. Ce qui permettra de donner un sens plus concret à la notion d'état et nous permettra d'envisager des passages d'un état à l'autre grâce à un phénomène appelé transition de phase.

La matière, sauf exception, passe de l'état gazeux à l'état liquide puis solide, en diminuant la température, par exemple. Ce qui a pour effet de réduire l'entropie ou quantité de désordre, et augmenter les énergies de liaisons entre éléments. Ce que nous venons d'écrire découle de la physique statistique et celle-ci a pris son essor au XIX^{ème} siècle jusqu'à atteindre son apogée grâce aux travaux de Ludwig Boltzmann. Mais les fondements mêmes qui ont permis de comprendre la théorie développée par Boltzmann sont arrivés avec la physique quantique au début du XX^{ème} siècle. Ce qui paraissait avoir une origine obscure, telle que la notion d'entropie, a pris un sens précis avec la physique quantique. Évidemment il n'est toujours pas possible de traiter la matière particule par particule quand celles-ci sont trop nombreuses, mais chaque particule peut être caractérisée individuellement par une fonction d'onde issue de la physique quantique et c'est l'étude statistique de l'ensemble des états quantiques autorisés par le système qui permet de comprendre la thermodynamique. À l'échelle macroscopique les effets quantiques ne sont généralement pas visibles directement dans les conditions de la vie de tous les jours. Mais dès le XIX^{ème} siècle certains dispositifs expérimentaux tels que ceux reproduisant le « corps noir » ne s'expliqueront ultérieurement que par la physique quantique avec la fameuse loi de Planck découverte en 1900. Les physiciens comprirent très rapidement que pour mettre en avant de tels phénomènes quantiques il était préférable de réduire la température du système jusqu'à des valeurs proches du zéro absolu. De ce fait en diminuant la température, l'agitation thermique est atténuée et la longueur d'onde de de Broglie, $\lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}$, associée à chaque particule, augmente. Lorsque cette longueur d'onde devient aussi grande que les dimensions caractéristiques du système, il est essentiel de traiter le système

en tenant compte de ses propriétés quantiques.

C'est ainsi que Kapitza découvrit en 1938 l'état de superfluidité en refroidissant de l'hélium ^4He à des températures inférieures à 2.17 K. Le fluide étudié présentait plusieurs propriétés intéressantes et peu intuitives. Nous les introduirons en abordant les résultats expérimentaux qu'il a obtenus. En effet, Kapitza, sans atteindre le zéro absolu et nous verrons plus loin les raisons pour lesquels ceci est important de le préciser, s'est aperçu que le fluide étudié pouvait s'échapper de son récipient à travers des capillaires qu'aucun fluide visqueux n'aurait pu traverser. Il en déduisit que le fluide qui s'écoulait n'était pas visqueux. Puis ensuite il s'est aperçu qu'au fur et à mesure que le fluide s'écoulait à travers les capillaires, la température à l'intérieur du récipient augmentait. C'est en 1941 que Landau décrira théoriquement le comportement macroscopique des superfluides dont nous pouvons retrouver l'explication dans le tome 6 de la collection des Landau et Lifchitz [62]. Il décomposa le liquide en deux parties imbriquées l'une dans l'autre, la première correspondant à une phase superfluide et l'autre à un fluide dit « normal », qu'il appela modèle à « deux fluides ». La partie superfluide a pour caractéristique d'être non visqueuse, ne transportant pas d'entropie et décrivant un mouvement potentiel, c'est-à-dire dont la vitesse est définie par le gradient d'une fonction scalaire, appelée phase du superfluide. La partie normale reproduit, quant à elle, toutes les propriétés d'un fluide classique. Mais ceci n'est qu'une vue d'esprit simplifiée en termes « classiques » des phénomènes quantiques qui ont lieu dans les superfluides. L'expérience s'interprète maintenant, grâce à cette description, par le fait que seule la composante superfluide pouvait s'écouler à travers les capillaires et ne transportait pas d'entropie ou, dit autrement, de chaleur. Ce qui avait pour effet d'augmenter la densité d'entropie dans la cuve et donc par voie de conséquence la température. Les équations décrivant l'hydrodynamique des superfluides sont en quelques sortes plus complexes, notamment parce que décomposer le fluide en deux parties a multiplié par deux le nombre d'équations, mais inversement les phénomènes physiques qui ont lieu dans ces fluides sont mieux compris et plus précisément décrits.

C'est dans cette même collection des Landau et Lifchitz au tome 5, correspondant à la physique statistique [63], que nous pouvons trouver un début d'explication sur les fondements microphysiques des superfluides. En refroidissant suffisamment un ensemble de particules, si l'interaction inter-particules est faible, comme pour l'Hélium, le fluide étudié restera liquide même proche du zéro absolu. Nous aurons affaire à une certaine forme de dégénérescence quantique de la matière, où les particules en première approximation suivront la répartition qui leur est associée, c'est-à-dire bosonique ou fermionique. Comme les particules interagissent faiblement il deviendra possible de calculer précisément les grandeurs thermodynamiques en supposant que l'ensemble des particules, après avoir inclus avec

précaution l'interaction, s'écarte faiblement de la distribution associée. Nous les appellerons des liquides quantiques ou, plus précisément, des liquides de Landau-Fermi ou des condensats de Bose-Einstein, appelés « *Bose-Einstein Condensate* » (BEC). Un tel nom a été choisi car en plus d'avoir à traiter une matière qui suit une fonction distribution (Bose ou Fermi) nous avons une matière en interaction, d'où le mots « liquide ».

Car l'interaction, qui est associée à la notion de liquide ici, agit de concert avec la fonction de répartition.

Plusieurs descriptions microphysiques beaucoup plus détaillées sont venues par la suite, selon la composition du système et les conditions auxquelles il est soumis. Ainsi à basse température l'hélium ^4He devient un condensat de Bose-Einstein alors que l'hélium ^3He , qui devient superfluide à des températures de l'ordre de $2 \cdot 10^{-3}\text{K}$, est décrit par la statistique de Fermi-Dirac. Dans ce dernier cas une faible interaction vient créer des paires d'atomes, dites paires de Cooper, ce qui permet d'expliquer l'origine de ce phénomène pour l'hélium ^3He . Nous avons le même phénomène dans le cas des supraconducteurs avec la création de paires de Cooper d'électrons. Ainsi l'origine fondamentale de la superfluidité ou de la supraconductivité provient de la tendance qu'a la matière de s'approcher de manière plus ou moins forte de la statistique de Bose. Dans le cas où le couplage est faible, c'est à dire composé de paires de Cooper de spin opposé, le système peut être décrit grâce à la théorie développée par Bardeen, Cooper, et Schrieffer (BCS) en 1957 [12]. Depuis les expérimentateurs ont répertorié plusieurs liquides quantiques accessibles sur Terre dont une liste est donnée dans le tableau suivant 1.1.

À ces systèmes étudiés s'ajoutent ceux encore mal connus tels que les neutrons superfluides et les protons supraconducteurs dans la matière nucléaire.

Dans ce chapitre nous n'aborderons que quelques descriptions théoriques de certains systèmes, dont ceux qui correspondent aux étoiles à neutrons. Nous pourrions nous plonger dans le livre de Leggett portant sur les liquides quantiques [67] ou dans le livre d'Alexandrov portant sur la supraconductivité [1] pour avoir une vue relativement complète de ces théories.

Je dirais que l'élément directeur pour beaucoup de ces théories serait la recherche d'une fonction d'onde relativement simple qui permettrait de décrire l'état quantique du fluide. L'exemple qui permet le mieux d'illustrer cette idée serait la description des condensats de Bose-Einstein. Du fait que les particules suivent la statistique de Bose, nous pouvons dire grossièrement qu'un nombre macroscopique de ces particules occupent l'état d'une seule particule.

TAB. 1.1: Liquides quantiques accessibles sur Terre (par ordre de découverte), avec la statistique qu'ils suivent, leur densité moyenne, la température critique et quelques commentaires sur leur description théorique. Tableau tiré de [67]

Système	Statistique	Densité (cm^{-3})	T_c (K)	Commentaires
Électrons dans un métal classique	Fermi	$\sim 10^{23}$	1-25	Supraconductivité décrite avec précision par la théorie BCS
Liquide ^4He	Bose	$\sim 10^{22}$	2.17	Expliqué uniquement par un superfluide de Bose dense
Liquide ^3He	Fermi	$\sim 10^{22}$	$2 \cdot 10^{-3}$	Appariement anisotropique
Cuprates et autres composés exotiques	Fermi	$\sim 10^{21}$	1-160	Appariement souvent décrit comme anisotropique
Gaz de Bose alcalins	Bose	$\sim 10^{15}$	$10^{-7} - 10^{-5}$	Premier réel système BEC dilué
Gaz de Fermi alcalins	Fermi/Bose	$\sim 10^{12}$	10^{-6}	Expériences de croisement des régimes BEC-BCS

1.1.1 Condensat de Bose-Einstein

En guise d'introduction nous présenterons brièvement la théorie des condensats de Bose-Einstein en nous fondant sur le livre de Leggett [67]. Prenons donc un système composé de N bosons et décrivons le, comme il est habituel de le faire, à l'aide d'une fonction d'onde du condensat Ψ , dénommée « paramètre d'ordre », prise à un instant t et à la position \mathbf{r} comme suit :

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{N(t)}\chi_0(\mathbf{r}, t) \quad (1.1)$$

où $\chi_0(\mathbf{r}, t)$ définit l'état d'une particule seule. Par définition de la fonction d'état d'une particule seule, nous avons la normalisation suivante :

$$\int d^3\mathbf{r} |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 = N(t) \quad (1.2)$$

Posons maintenant que la fonction d'onde décrivant l'état d'une particule seule s'écrit de la manière suivante :

$$\chi_0(\mathbf{r}, t) = |\chi_0(\mathbf{r}, t)| \exp(i\varphi(\mathbf{r}, t)) \quad (1.3)$$

où $\varphi(\mathbf{r}, t)$ est la phase de cette fonction d'onde, elle représente de manière équivalente la phase du paramètre d'ordre.

Ainsi à partir de cette équation 1.1 et en utilisant la phase du paramètre d'ordre apparaissant dans 1.3, nous pouvons définir deux quantités fondamentales de la phase superfluide. Nous avons tout d'abord la densité du condensat :

$$n(\mathbf{r}, t) \equiv |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 = N(t) |\chi_0(\mathbf{r}, t)|^2 \quad (1.4)$$

Puis nous avons ce qui pourrait être une quantité identifiée comme un courant de particules du condensat. Mais nous préférons l'associer plutôt à un flux d'impulsion pour être cohérent avec la suite. Ces deux quantités sont équivalentes si on divise le flux d'impulsion par une certaine masse dans le cas d'un seul fluide. En effet ces termes ont été source de confusions dans la littérature concernant les modèles à deux fluides ou ceux à plusieurs composants car cette masse dont nous parlons n'est pas toujours égale à la masse au repos des particules, elle porte d'ailleurs dans ce cas là le nom de masse effective. Par définition ce flux d'impulsion s'écrit :

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \equiv N(t) \left(-\frac{i\hbar}{2} \chi_0^*(\mathbf{r}, t) \nabla \chi_0(\mathbf{r}, t) + c.c. \right) \quad (1.5)$$

Ce qui donne en utilisant l'équation 1.1 :

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \hbar |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \nabla \varphi(\mathbf{r}, t) \quad (1.6)$$

La particularité des bosons condensés est que leur dynamique peut être décrit avec une relative précision par l'équation dépendant du temps de Gross-Pitaevskii. Cette équation est proche de l'équation de Schrödinger pour une particule mais ici elle contient un champ moyen dans le cas d'un grand nombre de bosons.

En introduisant le paramètre d'ordre dans cette équation nous trouvons que la dynamique est définie par :

$$i\hbar \partial_t \Psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, t) + \mu(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t) \quad (1.7)$$

où μ représente un potentiel chimique des bosons lié au champ moyen que nous ne caractériserons pas ici.

C'est avec cette équation que nous allons retrouver celles régissant l'hydrodynamique usuelle. Par exemple en prenant la partie réelle de 1.7 nous obtenons l'équation de conservation du nombre de particules :

$$\partial_t n(\mathbf{r}, t) = -\nabla \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}, t) \quad (1.8)$$

avec le courant de particules $\mathbf{n} = n\mathbf{v} = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{m}$ et la vitesse des particules superfluides \mathbf{v} .

Ensuite la partie imaginaire de 1.7 nous permet de retrouver l'équation de la dynamique du fluide c'est-à-dire :

$$m \partial_t \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \left(\mu(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2} m v^2 + \Phi_Q(\mathbf{r}, t) \right) \quad (1.9)$$

Dans cette équation nous retrouvons la pression quantique définie par :

$$\Phi_Q(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{n^{1/2}(\mathbf{r}, t)} \nabla^2 n^{1/2}(\mathbf{r}, t) \quad (1.10)$$

Mais cette pression devient négligeable lorsque le nombre de particules est très grand puisque le problème se réduit à la limite des faibles variations spatiales de densité.

Ainsi dans la limite de la pression quantique nulle nous avons l'équation hydrodynamique des superfluides habituelle :

$$m \frac{D\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{Dt} = -\nabla \mu(\mathbf{r}, t) \quad (1.11)$$

où $\frac{D}{Dt}$ représente la dérivée totale. Ainsi nous venons de voir qu'il est possible de décrire la dynamique d'un fluide quantique à partir d'une étude microscopique en faisant seulement quelques hypothèses simples sur les bosons. Ceci est dû au fait qu'un nombre macroscopique de ces particules se retrouve dans l'état d'une seule particule. Dans cette brève introduction nous avons défini quelques notions essentielles permettant de comprendre la dérivation microscopique de l'hydrodynamique des superfluides. Ici nous nous sommes placés dans le cas d'un grand nombre de bosons à température nulle.

Dans le cas que nous considérerons, c'est-à-dire un fluide composé de neutrons et de protons, il serait intéressant de donner les équations de l'hydrodynamique de ces fluides obtenues à partir d'une dérivation microscopique. Mais le problème se complique « sérieusement » lorsque l'on a affaire à des fermions même dans le cas d'une température nulle.

1.1.2 Théorie BCS et modèles de superfluides de fermions

Il convient d'aborder le problème via la théorie BCS pour tenter d'expliquer le comportement de ces fluides. Cette théorie permet de décrire une interaction attractive d'appariement faible entre fermions de spins opposés tels que les neutrons et les protons.

Avant d'aller plus en détails nous introduirons la théorie BCS pour le cas d'un superfluide neutre sans autre interaction que l'appariement. Pour cela nous commencerons par définir un champ d'opérateurs d'annihilation d'une particule dans

l'état de spin s à la position \mathbf{r} :

$$\Psi_s(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}s} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (1.12)$$

où \mathbf{k} définit un vecteur d'onde. Il est maintenant possible d'introduire l'hamiltonien BCS suivant :

$$\tilde{H} = \int d^3\mathbf{r} \left[\sum_{s=\uparrow,\downarrow} \Psi_s^\dagger(\mathbf{r}) \hat{h}(\mathbf{r}) \Psi_s(\mathbf{r}) + \Delta(\mathbf{r}) \Psi_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}) + \Delta^*(\mathbf{r}) \Psi_\uparrow(\mathbf{r}) \Psi_\downarrow(\mathbf{r}) \right] \quad (1.13)$$

avec

$$\hat{h}(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} - \mu \quad (1.14)$$

Le paramètre d'ordre est donné par la moyenne suivante :

$$\Delta(\mathbf{r}) = -g_0 \langle \Psi_\uparrow(\mathbf{r}) \Psi_\downarrow(\mathbf{r}) \rangle \quad (1.15)$$

où g_0 correspond au couplage qui est à l'origine de l'appariement.

Et nous le réécrivons de la manière suivante :

$$\Delta(\mathbf{r}) = |\Delta(\mathbf{r})| e^{i\varphi(\mathbf{r})} \quad (1.16)$$

La dépendance en temps est obtenue à partir de l'opérateur d'Heisenberg tel que ci-dessous :

$$\psi_s(\mathbf{r}, t) = e^{i\tilde{H}t} \Psi_s(\mathbf{r}) e^{-i\tilde{H}t} \quad (1.17)$$

Nous retrouvons les équations d'évolution de ce champ d'opérateur en utilisant les commutateurs usuels en mécanique quantique :

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_t \psi_\uparrow(\mathbf{r}, t) &= [\tilde{H}, \psi_\uparrow(\mathbf{r}, t)] \\ &= \hat{h}(\mathbf{r}) \psi_\uparrow(\mathbf{r}, t) + \Delta(\mathbf{r}) \psi_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (1.18)$$

et

$$\begin{aligned} -i\hbar \partial_t \psi_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}, t) &= [\tilde{H}, \psi_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}, t)] \\ &= \hat{h}^*(\mathbf{r}) \psi_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}, t) - \Delta^*(\mathbf{r}) \psi_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Le point fondamentale de ce développement apparaît avec les transformations de Bogoliubov agissant sur le champ d'opérateur :

$$\psi_\uparrow(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \left[u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) \beta_{\mathbf{k},\uparrow} - v_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}, t) \beta_{\mathbf{k},\downarrow}^\dagger \right] \quad (1.20)$$

$$\psi_{\downarrow}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \left[u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) \beta_{\mathbf{k}, \downarrow} + v_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}, t) \beta_{\mathbf{k}, \uparrow}^{\dagger} \right] \quad (1.21)$$

où β et β^{\dagger} sont des opérateurs fermioniques de création et d'annihilation de quasi-particules correspondant à une excitation élémentaire.

Les équations 1.18 et 1.19 deviennent à l'aide de ces transformations 1.20 et 1.21 les équations suivantes regroupées sous le noms d'équations de Bogoliubov-De Gennes :

$$i\hbar\partial_t \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) \\ v_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{h}(\mathbf{r}) & \Delta(\mathbf{r}) \\ \Delta^*(\mathbf{r}) & -\hat{h}^*(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) \\ v_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

Les fonctions d'ondes $u_{\mathbf{k}}$ et $v_{\mathbf{k}}$ constituent des vecteurs propres du système d'équations 1.22.

En faisant une moyenne statistique et en supposant la stationnarité du système, l'équation du paramètre d'ordre 1.15 devient avec ces transformations de Bogoliubov équation auto-cohérente appelée équation du gap :

$$\Delta(\mathbf{r}) = -g_0 \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) v_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}, t) (1 - 2f_{\mathbf{k}}) \quad (1.23)$$

avec

$$f_{\mathbf{k}} = \langle \beta_{\mathbf{k}, \uparrow}^{\dagger} \beta_{\mathbf{k}, \uparrow} \rangle = \frac{1}{1 + e^{\frac{E_{\mathbf{k}}}{T}}} \quad (1.24)$$

où T est la température. Nous avons $E_{\mathbf{k}}$ qui correspond à l'énergie de l'excitation de Bogoliubov défini dans la matière homogène comme :

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\varepsilon^2(\mathbf{k}) + |\Delta|^2} \quad (1.25)$$

où $\varepsilon(\mathbf{k})$ est l'écart d'énergie d'une particule excitée d'impulsion \mathbf{k} par rapport à son état fondamental.

La densité moyenne de superfluide est donnée quant à elle par l'équation suivante :

$$n(\mathbf{r}, t) = 2 \sum_{\mathbf{k}} (1 - 2f_{\mathbf{k}}) v_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) v_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}, t) + f_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) u_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}, t) \quad (1.26)$$

Dans le cas particulier de la température nulle, la densité du fluide se réduit à :

$$n(\mathbf{r}, t) = 2 \sum_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) v_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}, t) \quad (1.27)$$

Avec cette hypothèse de température nulle, il est facile de retrouver l'équation de conservation du nombre de particules en calculant la dérivée $\partial_t n$ avec les équations de Bogoliubov-De Gennes. Nous trouvons exactement :

$$\partial_t n = -\nabla \cdot (\mathbf{n} + \mathbf{n}_{qp}) \quad (1.28)$$

après avoir défini le courant de quasi-particules associées aux excitations de Bogoliubov par

$$\mathbf{n}_{qp} = \frac{i\hbar}{m} \sum_{\mathbf{k}s} (v_{\mathbf{k}} \nabla v_{\mathbf{k}}^* - v_{\mathbf{k}}^* \nabla v_{\mathbf{k}}) \quad (1.29)$$

et le courant de particules par

$$\mathbf{n} = 2 \left(\sum_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^* \right) \frac{\hbar}{m} \nabla \varphi \quad (1.30)$$

Nous pourrions remarquer que le courant de quasi-particules n'est pas excité à basses énergies, i.e. aux grandes longueurs d'ondes, ce qui est le cas dans des conditions normales de l'hydrodynamique classique.

En revanche une telle dérivation pour l'équation dynamique est beaucoup plus complexe à obtenir que l'équation de conservation du nombre de particule, parce qu'elle fait intervenir l'équation du gap qui peut présenter des problèmes de convergences lors de la sommation sur tout les états. Pour ce faire il est possible par exemple de faire intervenir les transformations de Wigner pour éliminer ces divergences et ainsi retrouver l'équation dynamique du superfluide à température nulle. Nous nous référons à Tonini et al. [98] ou Urban et Schuck [100] pour illustrer cet exemple.

Par contre la dérivation microscopique des équations hydrodynamiques des superfluides à plusieurs composants reste encore relativement inexplorée. Elle pourrait permettre de faire la jonction entre le monde microscopique et les équations hydrodynamiques qui sont bien établies. De tels liens entre l'hydrodynamique, qui est valable pour un grand nombre de particules, et la physique quantique restent malgré tout une exception par rapport à l'ensemble des fluides connus jusqu'à présent.

Cependant, nous calculerons une partie des paramètres caractérisant l'hydrodynamique des superfluides à plusieurs composants en nous fondant sur leur description microscopique. Par exemple le phénomène d'entraînement entre composants, dont nous allons parler plus loin, pourra être calculé à partir d'un hamiltonien quantique issu de la théorie des liquides de Landau-Fermi décrivant ces superfluides [68, 13, 90, 18, 51].

1.2 Équations de l'hydrodynamique des superfluides à plusieurs constituants

C'est l'hydrodynamique relativiste à plusieurs constituants, développée notamment par Brandon Carter [26], qui a permis de comprendre fondamentalement les

équations pour des superfluides à plusieurs constituants, notamment grâce à l'exigence en relativité de définir rigoureusement les variables sous forme de quadri-vecteurs et ainsi que des quantités invariantes. Mais nous définirons dans ce chapitre essentiellement l'hydrodynamique sous sa forme newtonienne. Ceci pour la simple raison que les conditions que nous poserons plus loin telles que la localité de notre étude, nous permettront d'utiliser cette forme pour le développement des calculs par la suite.

Ce choix n'enlève rien à la rigueur du problème posé et se justifiera par les hypothèses que nous définirons au chapitre 1.4. Par souci de généralité nous ne préciserons pas les conditions physiques particulières dans l'immédiat, telle que la composition du système ou sa température, afin de nous permettre de faire la distinction entre la forme de ces équations à proprement parler et la particularité d'un système choisi. La dérivation, dont le procédé est similaire à celui utilisé en relativité, peut être abordée selon deux principes différents qui mathématiquement parlant sont équivalents. Soit nous partons d'un principe de conservation des quantités physiques [3], soit nous posons un principe variationnel [81, 80, 34], c'est-à-dire minimisant une action donnée. Mais les deux permettent d'arriver au même résultat.

Comme un choix sur la méthode s'impose, nous développerons cette section en nous fondant sur un principe variationnel décrit dans [81, 80, 34, 24]. L'ensemble des calculs de cette section sont tirés en particulier de l'article de Reinhard Prix [80] qui synthétisent ses travaux de thèse [81].

Nous allons donc considérer de manière générale un ensemble de particules qui peuvent être distinguées et étiquetées par des lettres, telles que a ou b . Le comportement dynamique de ces particules non chargées électriquement sera considéré comme fluide.

Ainsi la dynamique du système considéré est complètement gouvernée par une action \mathcal{A} défini par :

$$\mathcal{A} = \int \Lambda_H dV dt \quad (1.31)$$

où Λ_H désigne une densité de lagrangien hydrodynamique.

Les variables cinématiques des fluides sont la densité n_a et le courant de particules \mathbf{n}_a , appelé aussi flux de particules. Le lagrangien hydrodynamique est donc une fonction de ces variables, c'est-à-dire $\Lambda_H = \Lambda_H(n_a, \mathbf{n}_a)$. Il est maintenant possible de leur associer les variables conjuguées π^a et \mathbf{p}^a qui définissent les quantités dynamiques du système. Plus précisément nous écrivons la différentielle totale du lagrangien sous la forme :

$$d\Lambda_H = \sum_a (\pi^a dn_a + \mathbf{p}^a \cdot d\mathbf{n}_a) \quad (1.32)$$

Ici les indices et exposants pour les constituants respectent la convention d'Einstein pour la sommation et nous nous efforcerons de continuer de le faire dans la mesure du possible tout le long de ce manuscrit afin de distinguer quelle variable est conjuguée de l'autre. Mais nous préférons ajouter le symbole de sommation pour éviter toute confusion, d'autant plus que nous ne sommes pas dans une approche relativiste. De cette différentielle totale nous définissons :

$$\pi^a = \frac{\partial \Lambda_H}{\partial n_a} \quad (1.33)$$

qui représente dans un sens très général une énergie par particule fluide. Cette quantité comprend l'énergie d'interaction par particule mais aussi l'énergie cinétique par particule. Puis nous définissons l'impulsion ou quantité de mouvement par particule fluide :

$$\mathbf{p}^a = \frac{\partial \Lambda_H}{\partial \mathbf{n}_a} \quad (1.34)$$

Notons que le courant de particules est relié à la vitesse, \mathbf{v}_a , des particules a de la manière suivante :

$$\mathbf{n}_a = n_a \mathbf{v}_a \quad (1.35)$$

Pour trouver les équations hydrodynamiques nous appliquons un déplacement infinitésimal temporel τ_a et un déplacement infinitésimal spatial $\boldsymbol{\xi}_a$ sur la ligne de fluide a dont sont fonctions la densité de particule n_a et le courant de particule \mathbf{n}_a . Nous déduisons, après quelques calculs détaillés dans [80], une variation du lagrangien comme suit :

$$\delta \Lambda_H = \sum_a (g^a \tau_a - \mathbf{f}^a \cdot \boldsymbol{\xi}_a) + \partial_t R + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{R} \quad (1.36)$$

Les quantités R et \mathbf{R} , exprimées dans [80], respectent l'équation d'Euler-Lagrange et n'interviendront donc pas par la suite. La variation de l'action \mathcal{A} s'écrit donc d'après 1.31 :

$$\delta \mathcal{A} = \sum_a \int_V (g^a \tau_a - \mathbf{f}^a \cdot \boldsymbol{\xi}_a) dV dt \quad (1.37)$$

en posant $\tau = 0$ et $\boldsymbol{\xi} = 0$ aux extrémités de l'intégrale.

La quantité \mathbf{f}^a représente une densité de force agissant sur le fluide a. Qui de manière plus explicite s'écrit :

$$\mathbf{f}^a = n_a (\partial_t \mathbf{p}^a - \boldsymbol{\nabla} \pi^a) - \mathbf{n}_a \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{p}^a) + \mathbf{p}^a \Gamma_a \quad (1.38)$$

La quantité g^a représente un transfert d'énergie du système au constituant a et s'écrit explicitement :

$$g^a = \mathbf{v}_a \cdot (\mathbf{f}^a - \mathbf{p}^a \Gamma_a) - \pi^a \Gamma_a \quad (1.39)$$

Le terme Γ_a décrit le taux de création ou d'annihilation de particules a et se définit par :

$$\Gamma_a = \partial_t n_a + \nabla \cdot \mathbf{n}_a \quad (1.40)$$

Il permet d'exprimer la force de « propulsion » ou effet « fusée » sous la forme $\mathbf{p}^a \Gamma_a$, cette force est due à la transformation d'un constituant en un autre avec l'impulsion de ce dernier.

Jusqu'à présent nous n'avons fait que décrire des identités mathématiques. Si nous imposons des déplacements spatiaux et temporels commun aux constituants, c'est à dire $\xi_a = \xi$ et $\tau_a = \tau$, nous obtenons les équations les plus générales possible et la variation de l'action résultante s'écrit :

$$\delta \mathcal{A} = \int (g_{\text{ext}} \tau - \mathbf{f}_{\text{ext}} \cdot \xi) dV dt \quad (1.41)$$

Les quantités g_{ext} et \mathbf{f}_{ext} représentent le transfert d'énergie et la force issues de l'extérieur agissant sur le système considéré. Bien sûr ces quantités s'annulent si nous considérons un système isolé. Cette influence de l'extérieur peut être la gravitation par exemple.

Ainsi en reprenant les équations 1.38 et 1.39, nous pouvons décrire la dynamique des fluides grâce aux égalités suivantes :

$$\sum_a \mathbf{f}^a = \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad \text{et} \quad \sum_a g^a = g_{\text{ext}} \quad (1.42)$$

Par contre il sera nécessaire de déterminer autant de forces agissant sur chaque constituant qu'il y a de constituants indépendants dynamiquement. Ainsi par exemple dans le cas d'un mélange à deux constituants seulement, noté 1 et 2, la relation $\mathbf{f}^1 + \mathbf{f}^2 = \mathbf{f}_{\text{ext}}$ nous indique que le système d'équations sera fermé si la force extérieure est déterminée mais aussi l'une des deux forces \mathbf{f}^a , qui peut être une force mutuelle de résistance par exemple.

Dans le cas précis de la gravitation comme seule force extérieur, tel que nous pourrions avoir dans une étoile à neutrons, il est possible d'effectuer les transformations de force et d'énergie suivantes :

$$\tilde{\mathbf{f}}^a = \mathbf{f}^a + m^a n_a \nabla \Phi \quad (1.43)$$

et

$$\tilde{g}^a = g^a + m^a n_a \mathbf{v}_a \cdot \nabla \Phi \quad (1.44)$$

où Φ désigne le potentiel gravitationnel. Avec ces transformations les identités 1.42 deviennent :

$$\sum_a \tilde{\mathbf{f}}^a = 0 \quad \text{et} \quad \sum_a \tilde{g}^a = 0 \quad (1.45)$$

et le système apparaît comme isolé.

Avec les relations 1.42 il est possible de montrer que l'équation 1.38 permet d'aboutir à un principe de conservation d'impulsion et l'équation 1.39 permet d'aboutir à un principe de conservation de l'énergie [80].

1.2.1 Lagrangien hydrodynamique

Pour aller plus loin dans le développement des calculs il est important de préciser plus en détails la forme du lagrangien Λ_H , ce qui nécessite de déterminer proprement toutes les formes d'énergies qui agissent sur le système. Depuis les travaux de Andreev et Bashkin en 1975 [4] sur le concept d'entraînement, la littérature sur ce type d'hydrodynamique s'est considérablement agrandie, et les années 2000 ont été particulièrement fructueuses afin de l'appliquer aux étoiles à neutrons.

Ce lagrangien peut s'écrire de manière générale sous la forme d'une différence de densité d'énergie cinétique et densité d'énergie d'interaction de la matière :

$$\Lambda_H(n_a, \mathbf{n}_a) = \sum_a m^a \frac{\mathbf{n}_a^2}{2n_a} - \mathcal{E} \quad (1.46)$$

où \mathcal{E} définit le potentiel thermodynamique qui comprend l'énergie interne, il définit l'équation d'état du système.

Ce qui nous permet d'expliciter un peu plus les quantités dynamiques :

$$-\pi^a = \frac{1}{2} m^a \mathbf{v}_a^2 + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial n_a} \quad (1.47)$$

et

$$\mathbf{p}^a = m^a \mathbf{v}_a - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbf{n}_a} \quad (1.48)$$

Notons que, toujours dans un esprit de généralité, la densité d'énergie interne dépend des densités mais aussi des courants de particules, $\mathcal{E} = \mathcal{E}(n_a, \mathbf{n}_a)$. Dans le référentiel où le constituant a est au repos, c'est-à-dire dans lequel $\mathbf{n}^a = 0$, la dérivée $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial n_a}$ coïncide avec le potentiel chimique habituel du constituant, nous écrivons donc :

$$\left. \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial n_a} \right|_{\mathbf{v}^a=0} = \mu^a \quad (1.49)$$

Par contre $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial n_a}$ est invariant par changement de référentiel galiléen du fait que n_a est aussi invariant par un tel changement de référentiel.

Un changement de référentiel galiléen implique des transformations sur les quantités dynamiques \mathbf{p}^a et π^a . Si nous posons $\tilde{\mathbf{v}}_a = \mathbf{v}_a + \mathbf{V}$, les transformations conséquentes à ce changement de référentiel, obtenues dans l'ouvrage [62],

sont :

$$-\tilde{\pi}^a = \pi^a + \mathbf{V} \cdot \mathbf{p}^a + \frac{1}{2}m^a \mathbf{V}^2 \quad (1.50)$$

et

$$\tilde{\mathbf{p}}^a = \mathbf{p}^a + m^a \mathbf{V} \quad (1.51)$$

Si nous posons $\mathbf{V} = -\mathbf{v}^a$ afin de se placer dans le référentiel au repos pour le constituant a nous trouvons :

$$\tilde{\pi}^a = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial n_a} = -\mu^a \quad (1.52)$$

Et par conséquent dans n'importe quel référentiel de mesure nous avons :

$$-\pi^a = \mu^a - \frac{1}{2}m^a \mathbf{v}_a^2 + \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{p}^a \quad (1.53)$$

1.2.2 Phénomène d'entraînement

Nous donnerons beaucoup plus de détails dans la section suivante sur les formes de dépendance au courant \mathbf{n}_a de l'énergie interne \mathcal{E} mais il est intéressant de voir ici qu'elle est à l'origine du phénomène d'entraînement ou de masse effectives dont nous allons voir les implications dynamiques.

L'entraînement est une interaction non dissipative entre les fluides qui a pour effet de rendre non colinéaire l'impulsion d'un fluide avec la vitesse. En d'autres termes nous pouvons écrire que :

$$\mathbf{p}^a = \sum_b K^{ab} \mathbf{n}_b = \sum_b m^{ab} \mathbf{v}_b \quad (1.54)$$

avec K^{ab} appelée matrice d'entraînement, et m^{ab} pourrait s'appeler matrice de masses pour la différencier de la précédente.

D'autre part le changement de référentiel galiléen $\tilde{\mathbf{v}}'_a = \mathbf{v}_a + \mathbf{V}$ transforme l'impulsion selon l'équation 1.51 et le courant de particule se transforme de la même manière :

$$\tilde{\mathbf{n}}_a = \mathbf{n}_a + n_a \mathbf{V} \quad (1.55)$$

Ces deux équations 1.51 et 1.55, qui sont en quelque sorte le résultat de l'invariance de la masse et de la densité par changement de référentiel galiléen, impliquent la relation fondamentale sur la matrice d'entraînement :

$$\sum_b n_b K^{ab} = \sum_b m^{ab} = m^a \quad (1.56)$$

Ce qui réduis le nombre de coefficients à déterminer pour cette matrice par le nombre de fluides considérés.

L'invariance galiléenne de l'énergie interne $\mathcal{E}(n_a, \mathbf{n}_a)$ nous permet de reformuler cette quantité de la manière suivante :

$$\mathcal{E}(n_a, \mathbf{n}_a) = \mathcal{E}(n_a, \Delta_{ab}) \quad (1.57)$$

où $\Delta_{ab} = \mathbf{v}^a - \mathbf{v}^b = \frac{\mathbf{n}^a}{n_a} - \frac{\mathbf{n}^b}{n_b}$.

Ce qui nous conduit à l'identité suivante :

$$\sum_a n_a \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbf{n}_a} = 0 \quad (1.58)$$

et qui nous donne la relation suivante sur la densité totale d'impulsion :

$$\mathbf{P} = \sum_a n_a \mathbf{p}^a = \sum_a m^a \mathbf{n}_a \quad (1.59)$$

Enfin si nous posons que cette énergie interne est isotrope nous arrivons à la formulation suivante :

$$\mathcal{E}(n_a, \mathbf{n}_a) = \mathcal{E}(n_a, \Delta_{ab}^2) \quad (1.60)$$

Ce qui nous permet de poser :

$$d\mathcal{E} = \sum_a \mu^a dn_a + \sum_{ab} \alpha^{ab} d\Delta_{ab}^2 \quad (1.61)$$

et de rendre symétrique la matrice d'entraînement telle que $K^{ab} = K^{ba}$.

Le point essentiel dans ce phénomène d'entraînement est qu'il n'a de sens que lorsqu'il existe une différence de vitesse entre les fluides. Si deux fluides se déplacent à la même vitesse, l'entraînement entre ces deux fluides disparaît, c'est pour cette raison que il est parfois défini en terme de différences de vitesses Δ_{ab} . Tout ceci n'est qu'une question de choix de référentiel en quelque sorte. Ici nous avons préféré éviter d'alourdir les notations en introduisant le terme Δ_{ab} et mettre l'accent sur l'aspect non colinéarité entre vitesse et impulsion.

Dans la littérature ce phénomène a été source de quelques confusions, en effet si nous divisons l'impulsion \mathbf{p}^a par la masse m^a du constituant a nous retrouvons une quantité homogène à une vitesse qui ne définit pas en réalité la vitesse des particules de matière elle même. Tout au plus nous pouvons lui associer la vitesse d'une phase superfluide dans le cas de tels fluides. Même dans le cas où la matière ne contient qu'un seul constituant mais se décompose en deux fluides, par exemple l'un « superfluide » et l'autre « normal », une différence doit être faite. La vitesse associée à l'impulsion n'est pas forcément la vitesse matérielle associée au courant de particules. Cette confusion se retrouve notamment dans le tome 6 de la collection des Landau et Lifchitz [62] portant sur la mécanique des fluides. Par contre il

est vrai que si les différentes vitesses sont proprement définies, nous avons une équivalence entre les équations dans [62] et celle que nous venons de poser. Plus de détails sur cette équivalence sont donnés, par exemple, dans [80].

Maintenant il nous reste à donner quelques précisions pour le cas particulier qui nous intéressera, c'est-à-dire le phénomène de superfluidité et ses effets sur les équations hydrodynamiques. Tout d'abord comme nous l'avons dit précédemment dans la partie concernant la théorie des superfluides, les phases superfluides sont caractérisées par l'absence de mécanismes dissipatifs tel que l'effet de viscosité. Ceci aura pour effet de simplifier considérablement l'expression des équations car les forces \mathbf{f}^a et les transferts d'énergie g^a sont nuls pour ces phases. La structure des équations dynamiques sera plus proche d'une équation d'Euler que de l'équation de Navier-Stokes par exemple.

Ceci dit, si nous nous plaçons dans le cadre de la superfluidité à température non nulle, il est nécessaire de considérer la phase normale dans les fluides. Non seulement notre système contient autant de superfluides qu'il y a de constituants dans la matière qui ont la propriété de devenir superfluide, mais d'après le modèle à deux fluides, le système s'enrichit d'un fluide supplémentaire dit normal qui en générale contient en quelque sorte le reste de la matière non superfluide. Il est en générale impossible d'associer le fluide normale à certaines particules précisément dans la mesure où à température non nulle aucune particule ne devient totalement superfluide. En effet il n'est pas possible de distinguer quelle particule de ce constituant est superfluide et laquelle est normale.

1.2.3 Courant d'entropie

Le fluide normal a la propriété fondamentale de transporter l'entropie. Dans les modèles hydrodynamiques standards la dynamique de ce fluide est représentée par l'ajout d'un constituant virtuel qui n'est rien d'autre que l'entropie, s . Ainsi le courant de particules du fluide normal et le courant d'entropie ont la même vitesse associée, $\mathbf{v}_{normal} = \mathbf{v}_s$.

Le courant d'entropie est évidemment associé à une particule sans masse, c'est-à-dire $m^s = 0$, et la variable conjuguée de l'entropie est classiquement la température T . Ainsi il convient de remplacer la densité de particules par l'entropie s et le courant par le courant d'entropie $\mathbf{n}^s = s\mathbf{v}_s$ dans l'équation 1.40. Le taux de création d'entropie Γ^s s'identifie à un terme de chauffage qui pourrait être lié à d'éventuels effets dissipatifs de frottement par exemple. L'impulsion thermique s'écrit :

$$\mathbf{p}^s = \sum_{b \neq s} K^{sb} \mathbf{n}_b \quad (1.62)$$

où $K^{ss} = 0$ car l'entropie est sans masse. Nous remarquons que même si l'entropie est de masse nulle au repos elle n'a pas d'impulsion non nulle en générale à cause

de l'entraînement qui pourrait exister avec les autres fluides, ce qui lui acquiert une masse effective non nulle. Enfin nous exprimons l'énergie par particule d'entropie, qui n'est rien d'autre que la température lorsque le fluide est au repos :

$$-\pi^s = T + \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{p}^s \quad (1.63)$$

Cette énergie découle de l'équation établie précédemment 1.53. Pour retrouver les équations classiquement développés dans [62] pour une conduction thermique par le fluide normal il suffit d'annuler les termes d'entraînement K^{sb} .

1.2.4 Irrotationalité locale

Ensuite l'autre propriété fondamentale des superfluides vient de leur « irrotationalité » locale. Nous avons donc pour chaque phase superfluide a :

$$\nabla \times \mathbf{p}^a = 0 \quad (1.64)$$

Ici aussi nous avons une différence fondamentale avec les équations développées par Landau dans [62] puisque dans l'équation 1.64 celle-ci s'applique à l'impulsion. C'est d'ailleurs cette distinction qui avait conduit Landau à définir une vitesse superfluide irrotationnelle pour l'hélium ^4He . Alors qu'une seconde vitesse, associée au courant d'entropie, venait rendre non colinéaire l'impulsion et le courant de particules d' ^4He . Cette différence dans la définition de l'irrotationalité est d'autant plus importante qu'elle est consistante avec la conservation de la circulation de l'impulsion alors que ce n'est pas le cas si cette relation est appliqué aux vitesses. C'est d'ailleurs en établissant l'hydrodynamique relativiste que ceci à été mieux compris [25].

Les équations dynamiques s'en trouvent simplifiées d'un terme et deviennent pour les constituants superfluides :

$$\mathbf{f}^a = n_a (\partial_t \mathbf{p}^a - \nabla \pi^a) + \mathbf{p}^a \Gamma_a \quad (1.65)$$

1.2.5 Vortex superfluide

Enfin un dernier point caractéristique du phénomène de superfluidité et qui provient toujours de l'irrotationalité, concerne l'apparition de vortex quantifiés.

La condition 1.64 est équivalente à dire que le mouvement est potentiel, en d'autre terme nous pouvons écrire l'impulsion sous la forme :

$$\mathbf{p}^a = \hbar \nabla \varphi^a \quad (1.66)$$

où φ^a définit la phase du superfluide a. Cette phase peut être directement reliée à la phase du paramètre d'ordre dans le section 1.1.

La circulation de l'impulsion autour d'un contour fermé se définit comme :

$$\mathcal{C}^a = \oint \mathbf{p}^a \cdot d\mathbf{x} \quad (1.67)$$

C'est cette quantité physique qui est conservée en l'absence de viscosité.

Ainsi pour un mouvement potentiel, cette circulation s'écrit :

$$\mathcal{C}^a = \hbar \delta\varphi^a = \hbar [\varphi^a(x_0) - \varphi^a(\bar{x}_0)] \quad (1.68)$$

où \bar{x}_0 désigne le même point spatial après un tour contour fermé.

Si la différence de phase $\delta\varphi^a$ est non nulle, nous avons affaire à un défaut topologique dans le fluide qui peut être causé par la configuration spatiale du récipient, tel qu'un tore, ou alors cela peut provenir de la phase elle même. Dans ce dernier cas nous avons un vortex.

Cette propriété sur la circulation de l'impulsion d'un fluide, qui fait apparaître des vortex, est générale aux fluides parfait irrotationnels. Là où nous voyons que nous avons affaire à un superfluide c'est que seules quelques valeurs sont autorisées pour la circulation. Un superfluide étant un liquide quantique, le « potentiel », qui décrit l'impulsion, est directement relié à la phase du paramètre d'ordre et donc ne peut varier que d'un multiple de 2π après un tour sur le contour.

Ainsi pour les superfluides nous avons $\mathcal{C}^a = \hbar N 2\pi$ avec N une entier naturel. Ce sont les fameux vortex quantifiés.

1.3 Interactions et hydrodynamique : L'entraînement

Jusqu'à présent nous n'avons pas pris en compte l'interaction directement. Elle n'avait que pour effet de rendre superfluide une partie de la matière. Dans cette section nous allons détailler un peu plus le phénomène d'entraînement. Ceci ne pourra se faire sans définir les interactions que nous utiliserons pour toute la suite du manuscrit. De ce fait nous devons préciser la composition de la matière en interaction et c'est sans surprise que nous annonçons qu'elle sera constituée de neutrons et de protons qui interagissent avec l'interaction nucléaire.

Généralement les valeurs des paramètres d'entraînement sont calculées en se fondant sur la théorie des liquides de Landau-Fermi [68, 13, 90, 18].

Cette théorie consiste à supposer que les particules en interactions s'écartent faiblement d'une distribution de Fermi. L'ensemble des phénomènes d'excitations, notamment ceux liés aux interactions, ont lieu à la surface de la sphère de Fermi. C'est-à-dire que les énergies des excitations qui interviennent restent faibles par rapport à l'énergie de Fermi. Ce qui est le cas typiquement à faible température et

pour de faibles énergies d'interaction par rapport à l'énergie de Fermi. Rappelons que dans notre cas, nous considérons des superfluides et donc la température est au maximum inférieure à la température critique de superfluidité.

Pour expliquer cette théorie nous pouvons, par exemple, reprendre l'hamiltonien quantique décrivant les superfluides à plusieurs composants donné dans l'article de Gusakov et Haensel [51]. C'est avec ce type d'hamiltonien que certains paramètres de l'hydrodynamique des superfluides, tel que l'entraînement, sont obtenus. De manière générale dans la théorie des liquides de Fermi-Landau, l'hamiltonien quantique peut être décomposé de la façon suivante :

$$H - \sum_a \mu_a N_a = H_{LF} + H_{\text{paire}} \quad (1.69)$$

ou « a » est l'indice correspondant au composant considéré.

H_{LF} définit la partie de l'hamiltonien décrivant les liquides de Fermi et comprend l'interaction entre les divers composants. Elle s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} H_{LF} = & \sum_a \sum_{\mathbf{k}s} \varepsilon_{0\mathbf{k}}^a \left(\alpha_{\mathbf{k}}^{(a)\dagger} \alpha_{\mathbf{k}}^{(a)} - \theta_{\mathbf{k}}^a \right) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{ab} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'ss'} f^{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \left(\alpha_{\mathbf{k}}^{(a)\dagger} \alpha_{\mathbf{k}}^{(a)} - \theta_{\mathbf{k}}^a \right) \left(\alpha_{\mathbf{k}'}^{(b)\dagger} \alpha_{\mathbf{k}'}^{(b)} - \theta_{\mathbf{k}'}^b \right) \end{aligned} \quad (1.70)$$

avec $\alpha_{\mathbf{k}}^{(a)}$ et $\alpha_{\mathbf{k}}^{(a)\dagger}$ les opérateurs de création et d'annihilation de quasi-particules de Landau liées au composant a. La matière considérée ici est sans polarisation de spin. La fonction $\theta_{\mathbf{k}}^{(a)}$ correspond à une fonction échelon qui s'écrit de la manière suivante $\theta_{\mathbf{k}}^a = \theta(k_F^a - |\mathbf{k}|)$ avec k_F^a l'impulsion de Fermi liée à l'espèce « a ».

Dans la théorie des liquides de Landau-Fermi, le premier paramètre qui intervient est l'énergie d'une quasi-particule $\varepsilon_{0\mathbf{k}}^a$ sans l'interaction entre elles. Cette énergie est calculée à la surface de Fermi puisque nous étudions des petites excitations du système par rapport à l'état fondamental. C'est aussi l'énergie apportée au système dans l'état fondamental lorsque l'on ajoute une quasi-particule sans prendre en compte les modifications causées sur les interactions mutuelles entre quasi-particules. Chaque quasi-particule liée à un état d'excitation du système décrit donc un faible écart d'impulsion par rapport à l'impulsion de Fermi. Nous pouvons obtenir la vitesse des quasi-particules à la surface de Fermi par :

$$\mathbf{v}_{Fa} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \varepsilon_{0\mathbf{k}}^a}{\partial \mathbf{k}} \quad (1.71)$$

À partir de là nous définissons la masse effective de Landau à partir de la norme de cette vitesse :

$$m_*^a = \frac{\hbar k_F^a}{v_{Fa}} \quad (1.72)$$

Et donc au voisinage de la surface de Fermi nous avons l'énergie des quasi-particules qui s'écrit comme une dépendance linéaire à cet écart d'impulsion comme suit :

$$\varepsilon_{0\mathbf{k}}^a = \hbar v_{Fa} (|\mathbf{k}| - k_F^a) \quad (1.73)$$

Le deuxième paramètre dans la théorie vient de l'interaction entre quasi-particules, c'est une fonction des impulsions entre deux quasi-particules en interaction qui s'écrit $f^{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$. Ce terme est lié aussi à la déviation par rapport à la distribution de Fermi. Mais étant donné que nous nous plaçons dans le cas des faibles écarts à la distribution de Fermi cette fonction dépend, en première approximation, seulement de l'angle ξ défini entre les deux vecteurs d'impulsion \mathbf{k} et \mathbf{k}' . Considérant cette seule dépendance à l'angle ξ il devient possible de faire un développement en série de Legendre comme ci-dessous :

$$f^{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \sum_l f_l^{ab} P_l(\cos(\xi)) \quad (1.74)$$

ou P_l est le polynômes de Legendre à l'ordre l .

Les coefficients f_l^{ab} définissent les fameux paramètres de Landau qui ont été introduit pour cette théorie.

Ensuite vient la partie de l'hamiltonien décrivant l'appariement H_{paire} qui n'est pas très différent de l'hamiltonien introduit précédemment :

$$H_{\text{paire}} = \int d^3\mathbf{r} \left[\sum_a \Delta^a(\mathbf{r}) \Psi_{\uparrow}^{a\dagger}(\mathbf{r}) \Psi_{\downarrow}^{a\dagger}(\mathbf{r}) + \Delta^{a*}(\mathbf{r}) \Psi_{\uparrow}^a(\mathbf{r}) \Psi_{\downarrow}^a(\mathbf{r}) \right] \quad (1.75)$$

Dans un cas plus générale que la théorie BCS le gap est défini par :

$$\Delta^a(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}' V^a(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Psi_{\uparrow}^a(\mathbf{r}') \Psi_{\downarrow}^a(\mathbf{r}') \quad (1.76)$$

où $V^a(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ correspond à un potentiel à deux corps.

Nous remarquerons qu'aucun appariement neutron-proton n'est considéré ici. Ceci est dû au fait que dans la théorie BCS le phénomène d'appariement a lieu proche des surfaces de Fermi. Or dans les étoiles à neutrons la proportion de protons est bien inférieure à celle des neutrons. Les deux surfaces de Fermi sont donc très éloignées, éliminant donc tout appariement neutron-proton possible dans la mesure où le gap d'énergie Δ est plus petit que la différence d'énergie séparant les deux surfaces de Fermi.

Par ailleurs, avant d'aller plus loin dans les détails il convient de faire une approximation supplémentaire sur la température. En effet, considérer une température non nulle a pour effet, non seulement d'ajouter un fluide supplémentaire dans les équations hydrodynamiques, mais aussi nous oblige à prendre en compte

l'appariement dans l'hamiltonien pour les calculs de l'entraînement. Or il a été montré que les matrices d'entraînement n'étaient pas affectées par l'appariement dans la matière homogène à faible température [51]. Dans la cas d'une matière structurée à faible température, les matrices d'entraînement sont faiblement affectée selon le type d'appariement considéré [23]. Comme par la suite nous nous placerons dans la limite des températures nulles, nous allons admettre immédiatement cette hypothèse afin de simplifier certains calculs en omettant aussi le terme d'appariement.

Les « clefs » du calcul de ces paramètres résident en deux points essentiels comme nous allons le voir. Premièrement un courant de particules avec une vitesse donnée implique une translation de la sphère de Fermi associée à ces particules d'une valeur égale à leur impulsion moyenne. Ce qui évidemment affecte l'interaction entre les particules de toutes espèces. Deuxièmement nous chercherons à faire le lien entre variables quantiques et variables hydrodynamiques pour obtenir l'entraînement via l'interaction qui est décrite par la mécanique quantique.

Cette translation dont nous venons de parler peut se formaliser par la transformation suivante du vecteur d'onde associé au constituant « a » :

$$\tilde{\mathbf{k}} = \mathbf{k} + \mathbf{q}^a \quad (1.77)$$

où \mathbf{q}^a est le vecteur d'onde relié à l'impulsion par particule du constituant « a » apparaissant dans les équations hydrodynamiques précédentes et qui se définit par :

$$\mathbf{q}^a = \frac{\mathbf{p}^a}{\hbar} \quad (1.78)$$

Cette transformation peut se schématiser sur la figure 1.1 en représentant le déplacement relatif des sphères de Fermi des neutrons et protons d'un écart de vecteur d'onde \mathbf{q} tel que :

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^n - \mathbf{q}^p \quad (1.79)$$

Ce sont les particules comprises dans les zones avec les points sur la figures 1.1 qui vont intervenir dans le modèle des liquides de Landau-Fermi. Ces particules dans les zones avec les points correspondent en quelque sorte à des excitations du système le faisant dévier par rapport à son état fondamental. Il est important de noter que l'approche par ce modèle n'est valable que si $|\mathbf{q}^a| \ll k_F^a$ afin que les excitations restent dans le voisinage de la surface de Fermi.

Ensuite il reste à définir les variables hydrodynamiques en fonctions des variables quantiques en faisant les bonnes sommations. Nous choisissons d'adopter les sommations sous forme d'intégrales en raison du grand nombre de particules comprises dans le système. Ici nous allons exprimer les courants de particules en fonctions des impulsions, ce qui revient exactement à déterminer l'inverse de la matrice K^{ab} dans 1.54.

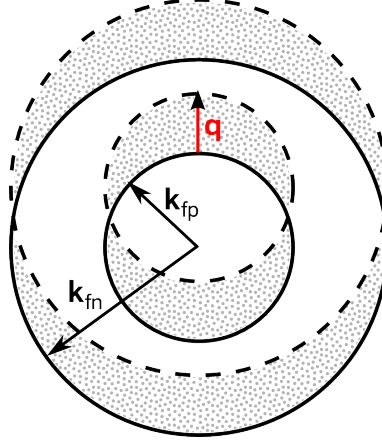


FIG. 1.1: Déplacement relatif des sphères de Fermi des protons et neutrons. Le déplacement a été volontairement exagéré pour être visible car selon ce modèle les sphères déplacées sont quasiment confondues avec celles statiques.

Pour commencer, la densité de particules s'écrit :

$$n_a = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \tilde{n}^a(\tilde{\mathbf{k}}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \bar{n}_0^a(\mathbf{k}) \quad (1.80)$$

où $\bar{n}_0^a(\mathbf{k})$ définit la fonction de distribution associée au constituant « a » à l'état statique étiqueté par l'indice 0 et sachant que la sphère de Fermi translatée est caractérisée par la fonction échelon $\tilde{n}^a(\mathbf{k}) = \theta(k_F^a - |\mathbf{k} - \mathbf{q}^a|)$. Ensuite le courant de particules s'exprime de la manière suivante d'après [13] :

$$\mathbf{n}_a = \frac{1}{\hbar} \sum_s \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}^a(\tilde{\mathbf{k}})}{\partial \mathbf{k}} \tilde{n}^a(\mathbf{k}) \quad (1.81)$$

où $\tilde{\varepsilon}^a(\tilde{\mathbf{k}})$ correspond à l'énergie locale de la quasi-particule associée au constituant « a », d'impulsion $\tilde{\mathbf{k}} = \mathbf{k} + \mathbf{q}^a$ et de spin s , qui normalement devrait être équivalent à

$$\mathbf{n}_a = \sum_s \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\hbar \mathbf{k}}{m^a} \tilde{n}^a(\mathbf{k}) \quad (1.82)$$

Le passage de l'équation 1.81 à la relation 1.82 est évident si nous considérons un gaz de Fermi, donc sans interaction. La relation devient moins évidente dans le cas avec interaction mais celle-ci découle simplement du principe d'invariance galiléenne. C'est justement cette relation non triviale qui va nous intéresser, puisqu'ici nous cherchons à exprimer les courants en fonction des impulsions qui interviennent dans l'interaction et donc dans les énergies.

Nous calculerons les énergies de ces quasi-particules à l'aide de la partie correspondant au liquide de Landau-Fermi dans l'équation 1.70 puisque nous sommes à température nulle. Nous l'exprimerons ici en termes de déviation de la distribution des quasi-particules à la distribution de Fermi statique :

$$\begin{aligned}
H_{LF} = & \sum_a \sum_s \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \varepsilon_{0\mathbf{k}}^a \delta\tilde{n}^a(\mathbf{k}) \\
& + \frac{1}{2} \sum_{ab} \sum_{ss'} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} f^{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \delta\tilde{n}^a(\mathbf{k}) \delta\tilde{n}^b(\mathbf{k}') \quad (1.83)
\end{aligned}$$

Où $\delta\tilde{n}^a(\mathbf{k}) = \tilde{n}^a(\mathbf{k}) - \bar{n}_0^a(\mathbf{k})$ désigne la déviation de la distribution des particules en mouvement par rapport à la distribution de Fermi statique $\bar{n}_0^a(\mathbf{k})$. En théorie les paramètres de Landau f^{ab} pourraient prendre en compte les spin s et s' mais nous considérerons une matière non polarisée en spin et donc nous prendrons les valeurs moyennes sur le spin des paramètres de Landau.

À partir de cette expression 1.83 nous pouvons déterminer l'énergie d'une quasi-particule comme :

$$\tilde{\varepsilon}^a(\mathbf{k}) = \varepsilon_{0\mathbf{k}}^a + \sum_{bs'} \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} f^{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \delta\tilde{n}^a(\mathbf{k}') \quad (1.84)$$

Étant donné que le modèle des liquides de Landau-Fermi suppose que nous avons des petites déviations par rapport à la distribution de Fermi nous pouvons linéariser l'expression donnant les courants de particules :

$$\mathbf{n}_a = \frac{1}{\hbar} \sum_s \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[\frac{\partial \varepsilon_{0\mathbf{k}}^a}{\partial \mathbf{k}} \delta\tilde{n}^a(\mathbf{k}) + \bar{n}_0^a(\mathbf{k}) \frac{\partial \delta \varepsilon_{\mathbf{k}}^a}{\partial \mathbf{k}} \right] \quad (1.85)$$

avec

$$\delta \varepsilon_{\mathbf{k}}^a = \sum_{bs'} \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} f^{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \delta\tilde{n}^a(\mathbf{k}') \quad (1.86)$$

Comme nous nous sommes placés dans l'approximation $|\mathbf{q}^a| \ll k_F^a$ nous avons :

$$\delta\tilde{n}^a(\mathbf{k}) \approx -\frac{\partial \bar{n}_0^a(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} \mathbf{q}^a \quad (1.87)$$

Notons que la fonction \bar{n}_0^a est une fonction échelon, qui mathématiquement parlant a sa dérivée qui fait intervenir la distribution de Dirac $\delta(x)$. Nous réécrivons donc la déviation, équation 1.87, de la manière suivante :

$$\delta\tilde{n}^a(\mathbf{k}) = \mathbf{q}^a \cdot \hat{\mathbf{k}} \delta(k_F^a - |\mathbf{k}|) \quad (1.88)$$

où $\hat{\mathbf{k}}$ désigne le vecteur normé $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$.

Le courant de particules issu de l'équation 1.85 s'écrit en utilisant la déviation explicite 1.88 :

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_a = & \frac{1}{\hbar} \sum_s \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\partial \varepsilon_{0\mathbf{k}}^a}{\partial \mathbf{k}} \left[\mathbf{q}^a \cdot \hat{\mathbf{k}} \delta(k_F^a - |\mathbf{k}|) \right] \\ & + \frac{1}{\hbar} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \bar{n}_0^a(\mathbf{k}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \left[\sum_{bss'} \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} f^{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \mathbf{q}^b \cdot \hat{\mathbf{k}}' \delta(k_F^b - |\mathbf{k}'|) \right] \end{aligned} \quad (1.89)$$

Si nous nous rappelons des définitions de la vitesse des quasi-particules, equation 1.71, et de la masse de Landau, equation 1.72, nous trouvons après une intégration par partie du second terme dans 1.90 :

$$\mathbf{n}_a = \frac{n_a}{m_*^a} \hbar \mathbf{q}^a + \sum_b G_{ab} \hbar \mathbf{q}^b = \frac{n_a}{m_*^a} \mathbf{p}^a + \sum_b G_{ab} \mathbf{p}^b \quad (1.90)$$

avec

$$G_{ab} = \frac{1}{9\pi^4} (k_F^a)^2 (k_F^b)^2 f_1^{ab} \quad (1.91)$$

où f_1^{ab} est le deuxième élément de la série en polynôme de Legendre des paramètres de Landau.

Nous retrouvons donc l'inverse de notre matrice d'entraînement :

$$Y_{ab} = (K^{ab})^{-1} = \frac{n_a}{m_*^a} \delta_{ab} + G_{ab} \quad (1.92)$$

De plus nous pouvons écrire maintenant la quantité H_{LF} à l'aide de formes quadratiques :

$$H_{LF} = H - \sum_a \mu_a N_a = \frac{1}{2} \sum_{ab} Y_{ab} \mathbf{p}^a \mathbf{p}^b \quad (1.93)$$

Et dans la mesure où nous savons qu'un superfluide stable à l'état fondamentale vérifie la relation $H - \sum_a \mu_a N_a > 0$ nous trouvons que la forme quadratique 1.93 est définie positive, c'est-à-dire que les quantités Y_{ab} vérifient les relations suivantes :

$$Y_{aa} > 0 \quad \text{et} \quad Y_{aa} Y_{bb} - Y_{ab}^2 > 0 \quad \text{pour } (a \neq b) \quad (1.94)$$

Enfin il est intéressant de vérifier que la matrice Y_{ab} est symétrique puisque le paramètre f_1^{ab} l'est aussi. Donc la matrice K^{ab} qui est l'inverse de la précédente est aussi symétrique comme nous l'avions prévu. De même il est possible de vérifier l'identité 1.56 relative à l'invariance galiléenne qui nous permet de retrouver la masse des particules. Les paramètres d'entraînement calculés ici sont donc consistants avec l'invariance galiléenne.

Concernant la matière nucléaire nous utiliserons deux classes d'interactions bien connues qui sont les interactions effectives de type Skyrme et les interactions de type Champ Moyen Relativiste, appelées « *Relativistic Mean Field* » (RMF).

1.3.1 Interaction effective de type Skyrme

Comme nous l'avons compris pour calculer les paramètres d'entraînement il faut se munir d'une fonctionnelle donnant la densité d'énergie. Dans le cas de l'interaction de type Skyrme ces calculs ont été effectués dans l'article de Chamel et Haensel [32]. La densité d'énergie est obtenue dans le cadre de la théorie des fonctionnelles de la densité développées par Hohenberg, Kohn, Sham [57, 59], qui pour une matière nucléaire homogène et sans polarisation de spin s'écrit d'après [14]. Nous l'écrivons sous la forme d'une sommation de termes isoscalaires et isovectoriels :

$$\mathcal{E} = \tau_0 + \sum_{\mathbb{T}=0,1} C_{\mathbb{T}}^m(n_B)n_{\mathbb{T}}^2 + C_{\mathbb{T}}^{\tau}n_{\mathbb{T}}\tau_{\mathbb{T}} + C_{\mathbb{T}}^j\mathbf{n}_{\mathbb{T}}^2 \quad (1.95)$$

où $\mathbb{T} = 0$ désigne les termes isoscalaires et $\mathbb{T} = 1$ désigne les termes isovectoriels. Les quantités isoscalaires sont définies comme une sommation sur les nucléons telle que $n_0 = n_n + n_p = n_B$ et les quantités isovectorielles sont définies comme une différences sur les nucléons telle que $n_1 = n_n - n_p$. Nous avons les termes $C_{\mathbb{T}}^n$ qui sont des fonctions de la densité baryonique moyenne et alors que les termes $C_{\mathbb{T}}^{\tau}$ et $C_{\mathbb{T}}^j$ qui sont des constantes par rapport aux densités. La quantité $\tau_0 = \tau_n + \tau_p$ représente la densité d'énergie cinétique qui se calcule à l'aide de l'équation suivante :

$$\tau_a = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} k^2 \bar{n}_0^a(\mathbf{k}) \quad (1.96)$$

Une telle fonctionnelle de la densité 1.95 est obtenue en faisant une approximation de champ moyen de type Hartree-Fock avec une interaction effective à deux et trois corps de type Skyrme. La paramétrisation habituelle de cette interaction s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) &= t_0(1 + x_0 P_{\sigma})\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\ &+ \frac{1}{2}t_1(1 + x_1 P_{\sigma})\left(\widehat{\mathbf{k}}^{\dagger 2}\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\widehat{\mathbf{k}}^2\right) \\ &+ t_2(1 + x_2 P_{\sigma})\widehat{\mathbf{k}}^{\dagger} \cdot \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\widehat{\mathbf{k}} \\ &+ \frac{1}{6}t_3(1 + x_3 P_{\sigma})\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\left[n_b\left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}\right)\right]^{\gamma} \\ &+ iW_0(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2) \cdot \left[\widehat{\mathbf{k}}^{\dagger} \times \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\widehat{\mathbf{k}}\right] \end{aligned} \quad (1.97)$$

où $P_{\sigma} = (1 + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)/2$ représente l'opérateur d'échange de spin et $\widehat{\mathbf{k}}$ se définit par $\widehat{\mathbf{k}} = (\boldsymbol{\nabla}_1 - \boldsymbol{\nabla}_2)/2i$. Le terme proportionnel à t_3 représente l'effet de l'interaction à trois corps réduit à une forme d'interaction à deux corps. De nombreux jeux de valeurs des paramètres ($t_0, t_1, t_2, t_3, x_0, x_1, x_2, x_3, \gamma, W_0$) sont disponibles, chacun étant calculé pour s'ajuster pour respecter certaines propriétés nucléaires

issues des expériences tout en s'adaptant aux conditions d'utilisations, telles que par exemple dans les étoiles à neutrons. En ce qui nous concerne nous prendrons la paramétrisation couramment appelée SLy4 et bien adaptée aux conditions qui règnent dans les étoiles à neutrons où la matière est fortement asymétrique [27, 28, 29, 30].

Paramètres	Valeur numérique
t_0 (MeV fm ³)	-2488.91
t_1 (MeV fm ⁵)	486.82
t_2 (MeV fm ⁵)	-546.39
t_3 (MeV fm ^{3+3γ})	13777.0
x_0	0.8340
x_1	-0.3438
x_2	-1.0
x_3	1.3539
γ	$\frac{1}{6}$
W_0 (MeV fm ⁵)	122.69

TAB. 1.2: Paramètres pour l'interaction de Skyrme SLy4 dont la densité de saturation nucléaire est $n_0 = 0.160 \text{ fm}^{-3}$ [28]

Dans le problème qui nous intéresse de la matière homogène, le terme de spin-orbite proportionnel à W_0 s'annule. À partir de cette forme de paramétrisation il est possible d'exprimer explicitement les termes que nous avons défini dans la densité d'énergie, equation 1.95 :

$$C_0^m(n_B) = \frac{3}{8}t_0 + \frac{3}{48}t_3n_B^\gamma \quad (1.98)$$

$$C_1^m(n_B) = -\frac{1}{4}t_0 \left(\frac{1}{2} + x_0 \right) - \frac{1}{24}t_3 \left(\frac{1}{2} + x_3 \right) n_B^\gamma \quad (1.99)$$

$$C_0^\tau = \frac{3}{16}t_1 + \frac{1}{4}t_2 \left(\frac{5}{4} + x_2 \right) \quad (1.100)$$

$$C_1^\tau = -\frac{1}{8}t_1 \left(\frac{1}{2} + x_1 \right) + \frac{1}{8}t_2 \left(\frac{1}{2} + x_2 \right) \quad (1.101)$$

Enfin en conséquence de l'invariance de la phase locale dans l'interaction de Skyrme [39] nous avons la relation :

$$C_{\mathbb{T}}^{\mathbf{j}} = -C_{\mathbb{T}}^\tau \quad (1.102)$$

Pour calculer les coefficients d'entraînement d'après 1.92 nous avons besoin de la masse effective de Landau, qui ici s'écrit :

$$\frac{\hbar^2}{2m_*^a} = \frac{\hbar^2}{2m^a} + (C_0^\tau - C_1^\tau)n_b + 2C_1^\tau n_a \quad (1.103)$$

ainsi que du deuxième élément de la série des paramètres de Landau [32] :

$$f_1^{\text{nn}} = 2(C_0^{\text{j}} + C_1^{\text{j}}) \left(\frac{k_F^{\text{n}}}{\hbar c} \right)^2 \quad (1.104)$$

$$f_1^{\text{pp}} = 2(C_0^{\text{j}} + C_1^{\text{j}}) \left(\frac{k_F^{\text{p}}}{\hbar c} \right)^2 \quad (1.105)$$

$$f_1^{\text{np}} = f_1^{\text{pn}} = 2(C_0^{\text{j}} - C_1^{\text{j}}) \frac{k_F^{\text{n}} k_F^{\text{p}}}{(\hbar c)^2} \quad (1.106)$$

1.3.2 Interaction de type Champ Moyen Relativiste

Cette classe d'interactions a été développée pour se placer dans un cadre relativiste, elle est donc adaptée pour calculer les coefficients d'entraînement relativiste. Nous pourrions donc nous passer de cette classe d'interactions dans la mesure où nous nous plaçons dans la limite newtonienne de l'hydrodynamique. Mais ce type d'interaction nous sera utile par la suite pour deux raisons. Premièrement parce les valeurs que nous utiliserons donnant les structures de la phase « pasta » dans les conditions que nous allons nous fixer ont été calculées avec une certaine interaction de type Champ Moyen Relativiste [6]. Ensuite il est tout à fait intéressant d'utiliser plusieurs catégories d'interaction à des fins de comparaisons et vérifications numériques. Seulement dans notre cas nous prendrons la limite non relativiste des coefficients d'entraînement.

La théorie quantique des champs (relativiste) fournit les outils nécessaires pour calculer de telles interactions. Ainsi nous pourrions dire que la théorie de l'interaction forte s'appelle la Chromodynamique quantique et a été développée dans ce cadre. Elle permet de décrire l'interaction qui existe entre les quarks qui sont les constituants élémentaires des nucléons. Par contre cette théorie à l'heure actuelle ne permet pas de faire des calculs satisfaisants dans le cas des étoiles à neutron, ni même pour de simples noyaux.

Depuis plusieurs années des théories relativistes « des champs » nucléaires ont été développées. En particulier, des champs moyens relativistes sont appliqués à la physique nucléaire. Ces développements sont d'autant plus nécessaires que d'une part les étoiles à neutrons sont des objets globalement relativistes mais d'autre part le cœur de ces étoiles soumet la matière à de telles conditions de pressions, densités, température..., que nous pouvons envisager d'avoir une approche relativiste de la modélisation de l'interaction nucléaire. Dans notre étude, nous nous placerons dans la croûte des étoiles à neutrons, où les effets relativistes ne prendront pas part de manière significative, sauf éventuellement pour les calculs de vitesse du son. Cependant, afin d'être cohérent dans la modélisation de l'ensemble de l'étoile

à neutrons, nous pourrions simplifier l'utilisation d'équations d'état en ayant une unique approche, relativiste, pour l'interaction du cœur à la surface. Nous pourrions trouver quelques descriptions de ce type d'interaction assez détaillées et appliquées aux étoiles à neutrons dans l'ouvrage de Glendenning [48] ou dans [85, 14].

L'idée principale consiste à supposer que l'interaction entre nucléons est calculée à l'aide de canaux d'interactions associés à des mésons. Ces champs de mésons sont dérivés à partir des équations classiques d'Euler-Lagrange appliqué aux moyennes sur le champ. L'interaction entre baryons mets en jeu dans ce type d'interaction des couplages mésons-nucléons. Dans la littérature plusieurs catégories de couplages sont utilisés, ceux de type non linéaire [47, 48, 61, 45] ou de type dépendant de la densité [99, 45, 49].

Le lagrangien adopté pour décrire ces champs de mésons s'écrit dans un formalisme relativiste et sans champs électromagnétiques de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \bar{\Psi} [\gamma_\mu (i\partial^\mu - \Gamma_\omega \omega^\mu) - (M - \Gamma_\sigma \sigma - \Gamma_\delta \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\delta})] \Psi \\
& + \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2 - \frac{1}{3} a \sigma^3 - \frac{1}{4} b \sigma^4 \right) \\
& - \frac{1}{4} \Omega_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \\
& + \frac{1}{2} (\partial_\mu \boldsymbol{\delta} \partial^\mu \boldsymbol{\delta} - m_\delta^2 \boldsymbol{\delta}^2)
\end{aligned} \tag{1.107}$$

avec $\Omega_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu$.

En utilisant les équations d'Euler-Lagrange nous trouvons pour l'équilibre stationnaire les équations suivantes :

$$[\gamma_\mu i\partial^\mu - \Gamma_\omega \omega_0 \gamma^0 - \Gamma_\rho \gamma^0 \tau_3 \rho_0 - (M - \Gamma_\sigma \sigma - \Gamma_\delta \tau_3 \delta_3)] \Psi = 0 \tag{1.108}$$

$$m_\sigma^2 \sigma = \frac{\hbar^3}{c} \Gamma_\sigma \langle \bar{\Psi} \Psi \rangle = \frac{\hbar^3}{c} \Gamma_\sigma n_s \tag{1.109}$$

$$m_\omega^2 \omega^\mu = \frac{\hbar^3}{c} \Gamma_\omega \langle \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \rangle = \frac{\hbar^3}{c} \Gamma_\omega n^\mu \tag{1.110}$$

$$m_\rho^2 \rho^0 = \frac{\hbar^3}{c} \Gamma_\rho \langle \bar{\Psi} \gamma^0 \tau_3 \Psi \rangle = \frac{\hbar^3}{2c} \Gamma_\rho n_3 \tag{1.111}$$

$$m_\delta^2 \delta_3 = \frac{\hbar^3}{c} \Gamma_\delta \langle \bar{\Psi} \tau_3 \Psi \rangle = \frac{\hbar^3}{c} \Gamma_\delta n_{s3} \tag{1.112}$$

Et dans le cas où le couplage est non linéaire, seulement pour le méson σ , l'équation 1.109 est remplacée par l'équation :

$$m_\sigma^2 \sigma + a \sigma^2 + b \sigma^3 = \frac{\hbar^3}{c} \Gamma_\sigma n_s \tag{1.113}$$

Les coefficients Γ_σ , Γ_ω , Γ_ρ et Γ_δ définissent les couplages. Ceux-ci peuvent être constants avec les couplages non linéaires a et b non nuls ou alors ces derniers sont nuls et les couplages sont dépendants de la densité. Les mésons ont pour masses m_σ , m_ω , m_δ et m_ρ . L'ensemble de ces coefficients, couplages et masses, ajustés pour respecter certaines propriétés nucléaires issues des expériences aussi permettent de définir un modèle d'interaction de type RMF. Nous pouvons préciser aussi certaines quantités à l'équilibre telles que les densités $n = n_p + n_n$, $n_3 = n_p - n_n$, $n_s = n_{sp} + n_{sn}$ et $n_{s3} = n_{sp} - n_{sn}$. La densité scalaire n_{sa} s'écrit à température nulle :

$$n_{sa} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_F^a} k^2 dk \frac{m_\oplus^a c^2}{\sqrt{(\hbar c)^2 k^2 + (m_\oplus^a)^2 c^4}} \quad (1.114)$$

où m_\oplus^a représente la masse effective de Dirac. Elle est différente de celle définie précédemment sous le nom de masse effective de Landau et se définit par :

$$m_\oplus^a c^2 = m c^2 - \Gamma_\sigma \sigma - \tau_{3a} \Gamma_\delta \delta_3 \quad (1.115)$$

avec les projections d'isospin $\tau_{3n} = -1$ et $\tau_{3p} = +1$ et la masse du nucléon m . Elle permet d'obtenir la masse effective de Landau sous la forme :

$$m_*^a = \sqrt{\left(\frac{p_F^a}{c}\right)^2 + (m_\oplus^a)^2} \quad (1.116)$$

avec $p_F^a = \hbar k_F^a$.

La solution analytique de la densité scalaire s'écrit avec 1.116 :

$$n_{sa} = \frac{c}{2\pi^2 \hbar^3} m_\oplus^a \left[p_F^a m_*^a c - m_\oplus^a c^2 \ln \left(\frac{p_F^a + m_*^a c}{m_\oplus^a c} \right) \right] \quad (1.117)$$

Si les densités sont fixées, l'inconnue restante est la masse de Dirac, nous la calculerons numériquement à l'aide de deux équations auto-cohérentes que nous allons établir ici. Elles sont obtenues en combinant 1.115 avec 1.112 et 1.109 sachant que la densité scalaire n'est fonction plus que de la masse de Dirac $n_{sa} = n_{sa}(m_\oplus^a)$ si les densités de neutrons et protons sont fixées. La première est donc :

$$n_{sn}(m_\oplus^n) + n_{sp}(m_\oplus^p) = \frac{m_\sigma^2}{\Gamma_\sigma^2} \left(m - \frac{m_\oplus^n + m_\oplus^p}{2} \right) \quad (1.118)$$

à laquelle il faut ajouter au terme de droite la quantité A :

$$A = \frac{a}{\Gamma_\sigma^3} \left(m - \frac{m_\oplus^n + m_\oplus^p}{2} \right)^2 + \frac{b}{\Gamma_\sigma^4} \left(m - \frac{m_\oplus^n + m_\oplus^p}{2} \right)^3 \quad (1.119)$$

si les coefficients non-linéaires sont pris en compte.

La seconde équation est :

$$m_{\oplus}^n - m_{\oplus}^p = \frac{\Gamma_{\delta}^2}{m_{\delta}^2} (n_{sn}(m_{\oplus}^n) - n_{sp}(m_{\oplus}^p)) \quad (1.120)$$

La méthode de résolution adoptées pour obtenir les valeurs numériques de m_{\oplus}^a sera une méthode de Newton-Raphson. Les masses de Dirac pour les protons et les neutrons sont égales dans le cas où l'interaction ne contient pas le méson δ comme nous pouvons le voir dans 1.120.

Les coefficients d'entraînement et donc les paramètres de Landau f_1^{ab} ont été calculés dans un cadre relativiste avec une interaction de type RMF dans Gusakov et al. [53]. En particulier dans cet article ils ont développé les calculs pour l'appliquer à l'interaction RMF donnée par Glendenning [47, 48] qui ne contient pas à la base le méson δ . En réalité l'ajout de ce méson ne change rien aux calculs si ce n'est que la masse effective de Dirac est affectée « numériquement ». Leur calcul reste donc valable en toute généralité pour l'ensemble des interactions de type RMF.

Les paramètres de Landau sont donc définis par :

$$f_1^{ab} = \frac{\hbar^3}{c^3} \frac{k_F^a k_F^b}{m_*^a m_*^b} \left[\frac{\Gamma_{\omega}}{B} \left(\frac{\Gamma_{\rho} \tau_{3b}}{2m_{\rho}^2} a_{12} - \frac{\Gamma_{\omega}}{m_{\omega}^2} a_{22} \right) + \frac{\Gamma_{\rho} \tau_{3a}}{2B} \left(\frac{\Gamma_{\omega}}{m_{\omega}^2} a_{21} - \frac{\Gamma_{\rho} \tau_{3b}}{2m_{\rho}^2} a_{11} \right) \right] \quad (1.121)$$

Avec les coefficients sans unités $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ et B qui sont définis par :

$$a_{11} = 1 + \frac{\hbar^3}{c^3} \frac{\Gamma_{\omega}^2}{m_{\omega}^2} \left(\frac{n_p}{m_*^p} + \frac{n_n}{m_*^n} \right) \quad (1.122)$$

$$a_{12} = \frac{\hbar^3}{c^3} \frac{\Gamma_{\omega} \Gamma_{\rho}}{2m_{\omega}^2} \left(\frac{n_p}{m_*^p} - \frac{n_n}{m_*^n} \right) \quad (1.123)$$

$$a_{21} = \frac{\hbar^3}{c^3} \frac{\Gamma_{\omega} \Gamma_{\rho}}{2m_{\rho}^2} \left(\frac{n_p}{m_*^p} - \frac{n_n}{m_*^n} \right) \quad (1.124)$$

$$a_{22} = 1 + \frac{\hbar^3}{c^3} \frac{\Gamma_{\rho}^2}{4m_{\rho}^2} \left(\frac{n_p}{m_*^p} - \frac{n_n}{m_*^n} \right) \quad (1.125)$$

$$B = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1.126)$$

En particulier nous utiliserons essentiellement l'interaction DDH δ déterminée dans Avancini et al. [7, 9, 6]. Cette interaction contient le mésons δ et ne fait pas intervenir de couplage non linéaire mais des couplages dépendants de la densité.

l	m_l (MeV)	$\Gamma_l(n_0)$	a_l	b_l	c_l	d_l
σ	550	10.72854	1.365469	0.226061	0.409704	0.901995
ω	783	13.29015	1.402488	0.172577	0.344293	0.983955
ρ	763	11.727	0.095268	2.171	0.05336	17.8431
δ	980	7.58963	0.01984	3.4732	-0.0908	-9.811

TAB. 1.3: Paramètres pour les couplages de l'interaction DDH δ dans [6]

Les couplages dépendant de la densité baryonique n_B s'écrivent de la manière suivante :

$$\Gamma_l(n) = \Gamma_l(n_0)h_l(x), \quad x = \frac{n_B}{n_0} \quad (1.127)$$

avec

$$h_l(x) = a_l \frac{1 + b_l(x + d_l)^2}{1 + c_l(x + d_l)^2}, \quad \text{pour } l = \sigma, \omega \quad (1.128)$$

et

$$h_l(x) = a_l \exp[-b_l(x - 1)] - c_l(x - d_l), \quad \text{pour } l = \rho, \delta \quad (1.129)$$

La densité de saturation nucléaire est $n_0 = 0.153 \text{fm}^{-3}$ et les valeurs des constantes a_l, b_l, c_l, d_l sont données dans le tableaux 1.3.

1.4 Modèle à deux composants pour les étoiles à neutrons

Pour terminer ce chapitre nous allons poser en détail les conditions physiques dans lesquelles nous allons nous placer pour la suite de cette étude. Celles-ci vont découler du type d'objet que nous allons étudier et des propriétés que nous cherchons à calculer de ce dernier . Ici nous avons pour objectif de calculer la chaleur spécifique dans la croûte interne des étoiles à neutrons. Ceci afin de tenter de retrouver certaines propriétés de la matière à partir d'observations de refroidissement de ces objets.

Ainsi nous pouvons en déduire plusieurs hypothèses importantes :

- Premièrement, les propriétés que nous voulons observer induisent que l'étoile à neutrons ait atteint un certain équilibre et surtout une température assez basse pour que les processus de refroidissement ne soit pas dominés pas l'émission de neutrinos. Nous pouvons donc supposer que la croûte de notre étoile sera composée essentiellement de neutrons, protons et électrons dont les proportions sont déterminées par l'équilibre β .

- Par ailleurs, nous allons effectuer cette étude localement et proche de l'équilibre statique locale. Ce qui a pour conséquence principale de nous permettre de négliger les effets particuliers à la relativité générale ou restreinte sur la structure des équations. D'où l'utilisation de l'hydrodynamique Newtonienne jusqu'à présent et pour la suite.
- D'autre part, ces hypothèses précédentes nous permettent de négliger les vortex et surtout les forces qui s'exercent entre eux.
- Toujours pour ces mêmes raisons et parce que nous allons étudier des perturbations autour de l'équilibre statique, nous pourrions négliger la gravitation newtonienne dans nos équations. Notre système pourra être considéré comme isolé localement, c'est-à-dire qu'aucune action ne s'exerce sur le fluide depuis l'extérieur, $\mathbf{f}^{\text{ext}} = 0$ et qu'aucun échange d'énergie avec l'extérieur n'a lieu, $g^{\text{ext}} = 0$

Nous allons aussi poser quelques autres hypothèses afin de simplifier les calculs tout en obtenant une bonne approximation des résultats :

- Nous allons par la suite appliquer les équations hydrodynamiques décrites précédemment à des calculs dans la croûte internes. Nous verrons dans la sous-section 2.3.2 du chapitre 2 que nous serons à la limite d'utilisations de ces équations. Cependant nous passerons outre ces limitations pour pouvoir faire une première étude dans ce projet en faisant ces quelques hypothèses simplificatrices.
- Nous savons que les étoiles à neutrons sont globalement neutres mais localement nous pouvons avoir une charge électrique non nulle, telle qu'au sein des structures que nous allons étudier. Il faudrait donc prendre en compte l'hydrodynamique pour des fluides chargés. Mais comme les niveaux d'énergies de l'interaction nucléaire sont supérieurs à ceux de l'interaction électromagnétique, nous considérerons que les phénomènes que nous allons étudier seront principalement issus de l'interaction nucléaire. Par ailleurs nous allons étudier des modes à basse énergie et donc à grande longueur d'onde. Or en réalité même à petite échelle la charge est en moyenne nulle sur des distances allant d'une dizaine de fm à quelques centaines de fm. De ce fait nous ferons donc disparaître artificiellement l'interaction électromagnétique pour le moment dans l'étude de modes nucléaires en considérant qu'il y a neutralité locale et à tout instant de la charge électrique. C'est-à-dire que $n_p = n_e$.
- D'autre part le rapport entre la masse du proton et de l'électron étant de l'ordre de 1836.15 nous négligerons la masse de l'électron.
- La proportion de phase dite normale par rapport à la phase superfluide est de l'ordre de $\exp\left(-\frac{\Delta^a}{k_B T}\right)$, où Δ^a définit une valeur approchée de l'éner-

gie d'appariement. Pour de la matière nucléaire il est habituel de prendre $\Delta^a \approx 1\text{MeV} = 1.16 \cdot 10^{10}\text{K}$. Dans ce cas la phase normale compte typiquement pour moins de 10% en dessous de $5 \cdot 10^9\text{K}$. Ainsi nous considérerons que le système peut être étudié dynamiquement avec la limite de température nulle jusqu'à quelques 10^9K . Au dessus de cette température notre modèle ne sera plus valable. Mais vue les stades d'évolution des étoiles à neutrons qui nous intéressent cette approximation est largement valable. Ce qui a pour effet de simplifier, les calculs comme nous l'avons vu, par la disparition du fluide normal.

- Étant donnée que la fréquence associée à une énergie thermique de l'ordre de 10^8K est égale à environ $1.309 \cdot 10^{19} \text{ s}^{-1}$ et que la fréquence associée aux transformations de particules par interaction faible est de l'ordre de 10^8 s^{-1} , nous ne considérerons aucune transformation de particules. Nous aurons donc $\Gamma_a = 0$ dans les équations hydrodynamiques (Attention de ne pas confondre Γ_a avec les constantes de couplages de l'interaction RMF).
- Enfin nous considérerons que nos fluides de neutrons et de protons seront entièrement décrits grâce aux interactions nucléaires que nous avons utilisées jusqu'à présent. Avec la condition de température nulle, cette hypothèse nous permettra de considérer qu'il n'y a aucune friction mutuelle entre fluides, ni de processus dissipatifs. Donc il n'y aura aucun échange d'énergie entre les fluides, $g^a = 0$, et aucune action mutuelle entre les fluides ne sera considérée, $\mathbf{f}^a = 0$. La seule « interaction » (non dissipative) entre les fluides qui sera considérée dans les équations hydrodynamiques, sera l'entraînement défini précédemment.

Toutes ces dernières hypothèses simplificatrices vont nous permettre une première approche du problème, mais nous ne doutons pas qu'une physique riche en phénomènes complexes, nouveaux et potentiellement porteur d'effets non négligeable, se cache derrière ces hypothèses.

En résumé nous utiliserons précisément les équations hydrodynamiques des superfluides à deux composants (neutrons-protons), qui sont la conservation du nombre de particules :

$$\begin{aligned}\partial_t n_n + \nabla \cdot \mathbf{n}_n &= 0 \\ \partial_t n_p + \nabla \cdot \mathbf{n}_p &= 0\end{aligned}\tag{1.130}$$

Ainsi que la conservation de l'impulsion ou équation d'Euler 1.65 pour les superfluides :

$$\begin{aligned}n_n (\partial_t \mathbf{p}^n - \nabla \pi^n) &= 0 \\ n_p (\partial_t \mathbf{p}^p - \nabla \pi^p) &= 0\end{aligned}\tag{1.131}$$

L'entraînement s'écrira simplement à l'aide d'une matrice 2×2 qui définit

$$\begin{aligned}\mathbf{p}^n &= K^{nn}\mathbf{n}_n + K^{np}\mathbf{n}_p \\ \mathbf{p}^p &= K^{pn}\mathbf{n}_n + K^{pp}\mathbf{n}_p\end{aligned}\tag{1.132}$$

Et l'énergie par particule ne change pas par rapport à l'équation 1.53

$$\begin{aligned}-\pi^n &= \mu^n - \frac{1}{2}m^n\mathbf{v}_n^2 + \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{p}^n \\ -\pi^p &= \mu^p - \frac{1}{2}m^p\mathbf{v}_p^2 + \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{p}^p\end{aligned}\tag{1.133}$$

Chapitre 2

Théorie des modes hydrodynamiques dans la croûte interne des étoiles à neutrons

« L'homme est grand sans doute, ou du moins il le dit et le croit ; mais ses capacités de conception et d'entendement, aussi vastes soient-elles n'en ont pas moins des bornes assignées par la nature même de son être..., tandis que la vérité est infinie..., à jamais inaccessible, à jamais incompréhensible. »

Ernest Esclangon, *Dix leçons d'Astronomie* (1934)

Sommaire

2.1	Perturbation au premier ordre et ondes sonores	64
2.2	La croûte interne : la phase « pasta »	75
2.3	Conditions aux bords	81
2.4	Modes hydrodynamiques dans les « lasagnes »	95

Il se trouve que pour les liquides quantiques il existe un lien entre les perturbations des quantités hydrodynamiques et les excitations thermiques. Ces perturbations par rapport à un équilibre s'apparentent à des modes collectifs bien connus en physique des noyaux atomiques par exemple. Nous appellerons ces excitations dans le cadre d'une approche hydrodynamique, des modes hydrodynamiques. Par ailleurs, une synthèse de cette partie a fait l'objet d'un article publié dans la revue *Physical Review C* [38]. Nous serons donc fidèle dans ce manuscrit à notre article concernant l'essentiel des notations.

2.1 Perturbation au premier ordre et ondes sonores

L'idée consiste à étudier le comportement dynamique d'une perturbation au premier ordre du système à l'équilibre hydrostatique afin de déduire les propriétés des modes hydrodynamiques.

Pour ce faire, nous allons prendre chaque quantité qui intervient dans notre modèle et la décomposer en deux parties. Celle à l'équilibre sera étiquetée par eq et la quantité perturbée sera devancée d'un δ de telle manière que pour une quelconque quantité X nous écrirons $X = X_{eq} + \delta X$.

Étant donné que nous avons supposé l'équilibre hydrostatique, la vitesse des fluides $\mathbf{v}_{a,eq}$ est nulle et par conséquent nous avons :

$$\mathbf{n}_{a,eq} = 0 \text{ et } \mathbf{p}_{eq}^a = 0 \quad (2.1)$$

D'autre part, l'hypothèse de localité va nous permettre de considérer que les quantités à l'équilibre varient faiblement spatialement. Ainsi avec l'hypothèse d'équilibre statique nous pourrions considérer que les dérivées temporelles et spatiales des quantités à l'équilibre sont nulles, i.e. $\partial_t X_{eq} = 0$ et $\nabla X_{eq} = 0$. Ce point nous donne un argument supplémentaire pour justifier la suppression de la gravitation dans nos équations, puisque son effet sur la dynamique des fluides dérive d'un potentiel.

Maintenant si nous ne gardons seulement les perturbations au premier ordre, les équations 1.130 deviennent linéarisées :

$$\partial_t \delta n_a + n_{a,eq} \nabla \cdot \delta \mathbf{v}_a = 0 \quad (2.2)$$

Nous effectuons maintenant une transformation de Legendre afin d'exprimer les variations de densités en termes de variations de potentiels chimiques :

$$\delta n_a = \sum_{b=n,p} \left(\frac{\partial n_a}{\partial \mu^b} \right)_{eq} \delta \mu^b \equiv \sum_{b=n,p} J_{ab} \delta \mu^b \quad (2.3)$$

J_{ab} est calculée à partir de l'inverse d'une matrice plus usitée dans les problèmes de propagation d'ondes sonores, c'est-à-dire :

$$(J^{-1})^{ab} = \left(\frac{\partial \mu^a}{\partial n_b} \right)_{eq} \quad (2.4)$$

Cette transformation peut ensuite être insérée dans l'équation 2.2 pour donner :

$$\frac{1}{n_{a,eq}} \left(\sum_{b=n,p} J_{ab} \partial_t \delta \mu^b \right) = -\nabla \cdot \delta \mathbf{v}_a \quad (2.5)$$

De même les quantités dynamiques deviennent une fois linéarisées :

$$\mathbf{p}^a = \delta \mathbf{p}^a = \sum_{b=n,p} K_{eq}^{ab} n_{b,eq} \delta \mathbf{v}_b \quad (2.6)$$

$$\pi^a = -\mu_{eq}^a - \delta \mu^a \quad (2.7)$$

Nous remarquons maintenant que seul le potentiel chimique intervient dans l'énergie π^a , les termes issus de l'énergie cinétique ont disparu. Ce qui nous permet d'écrire les équations 1.131 de manière linéarisée :

$$\sum_{b=n,p} K_{eq}^{ab} n_{b,eq} \partial_t \delta \mathbf{v}^b = -\nabla \delta \mu^a \quad (2.8)$$

Si nous prenons la divergence de cette dernière équation nous obtenons :

$$\sum_{b=n,p} K_{eq}^{ab} n_{b,eq} \partial_t (\nabla \cdot \delta \mathbf{v}^b) = -\nabla^2 \delta \mu^a \quad (2.9)$$

Nous pouvons maintenant remplacer dans 2.9 l'expression $\nabla \cdot \delta \mathbf{v}^b$ par celle obtenue dans l'équation 2.5 pour trouver :

$$\sum_{b=n,p} (KJ)^a_b \partial_t^2 \delta \mu^b = \nabla^2 \delta \mu^a \quad (2.10)$$

où $(KJ)^a_b$ définit le produit matriciel $K_{eq}^{ad} \times J_{db}$. Nous venons d'établir les deux équations 2.10 aux variables μ^n et μ^p gouvernant la propagation des perturbations. Ces deux équations sont couplées en raison de l'entraînement à proprement parler et de l'énergie d'interaction entre protons et neutrons, qui donnent des termes non diagonaux dans les matrices K et J . Dans la mesure où notre système est suffisamment homogène et isotrope localement, nous pouvons nous placer dans l'approximation « harmonique », c'est-à-dire que chaque perturbation se propage en onde plane. Cette hypothèse se caractérise par l'ansatz suivant :

$$\delta \mu^a(t, \mathbf{r}) = U^a e^{i(-\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (2.11)$$

avec ω qui définit la pulsation de l'onde et \mathbf{k} son vecteur d'onde. Cet ansatz nous permet de remplacer la dérivée temporelle, ∂_t , par $-i\omega$ et le gradient, ∇ , par $i\mathbf{k}$ dans les équations différentielles. Si nous réunissons les deux quantités (U^n, U^p) sous forme de vecteur U^a , les seules solutions décrivant la propagation des perturbations en onde plane sont les vecteurs propres de la matrice 2×2 dans 2.10. C'est-à-dire que les vecteurs propres U^a suivent la relation :

$$\sum_{b=n,p} (KJ)^a_b U^b = \frac{1}{u^2} U^a \quad (2.12)$$

où la valeur propre $1/u^2$ est liée à la vitesse $u = \omega/|\mathbf{k}|$ de propagation de l'onde. Dans notre cas elle correspond à la vitesse du son dans le fluide. Notons en particulier qu'en raison des dimensions de la matrice, liées simplement au nombre de fluides mis en jeux, nous avons, sauf cas particulier, deux vecteurs propres solutions de 2.12 que nous étiquetterons par $+$ et $-$. Car chaque mode associé à un vecteur propre U_{\pm}^a et une vitesse du son u_{\pm} ne décrit pas un mouvement purement de neutrons ou de protons isolément mais une combinaison de mouvements des deux types de particules. Numériquement nous verrons qu'un des modes correspond à un mouvement quasi commun des neutrons et des protons, nous l'associerons au mode $+$ et pour l'autre modes les vitesses seront presque opposées, ce sera donc le mode $-$.

Nous chercherons les solutions de l'équation 2.12 en obtenant d'abord les valeurs de la vitesse du son pour chaque mode \pm . Nous le ferons en résolvant l'équation définie par

$$\det(u^2 K J - I_{d2}) = 0 \quad (2.13)$$

où I_{d2} correspond à la matrice identité 2×2 . D'après les propriétés du déterminant cette équation est équivalente à :

$$\det(u^2 K - J^{-1}) = 0 \quad (2.14)$$

En reprenant l'équation 2.4 nous trouvons que u est solution de l'équation du second degré en u^2 :

$$Au^4 + Bu^2 + C = 0 \quad (2.15)$$

avec

$$A = K^{nn}K^{pp} - (K^{np})^2 \quad (2.16)$$

$$B = K^{pn} \frac{\partial \mu^n}{\partial n_p} + K^{np} \frac{\partial \mu^p}{\partial n_n} - K^{nn} \frac{\partial \mu^p}{\partial n_p} - K^{pp} \frac{\partial \mu^n}{\partial n_n} \quad (2.17)$$

$$C = \frac{\partial \mu^n}{\partial n_n} \frac{\partial \mu^p}{\partial n_p} - \frac{\partial \mu^n}{\partial n_p} \frac{\partial \mu^p}{\partial n_n} \quad (2.18)$$

Enfin par la suite nous rencontrerons le cas particulier où la matière est composée exclusivement de neutrons. Dans ces conditions l'entraînement disparaît et le système n'admet plus que la variable n_n . En conséquence un seul mode hydrodynamique est autorisé dans cette matière. Ainsi nous pouvons remplacer formellement dans 2.12 la quantité K par $\frac{m^n}{n_n}$ et la quantité J d'après 2.4 par $\left(\frac{\partial \mu^n}{\partial n_n}\right)^{-1}$. Ce qui nous donne la relation :

$$u^2 = \left(\frac{n_n}{m^n} \frac{\partial \mu^n}{\partial n_n}\right)_{eq} = \left(\frac{1}{m^n} \frac{\partial P}{\partial n_n}\right)_{eq} \quad (2.19)$$

où P définit la pression du système composé purement de neutrons à température nulle.

Enfin pour terminer cette partie, nous allons faire le lien avec nos excitations collectives initiales. En effets, si nous considérons un système homogène et isotrope composé de neutrons et protons superfluides, les excitations collectives autorisées pour un tel liquide quantique suivent une relation de dispersion linéaire :

$$\omega(k) = uk \quad (2.20)$$

où $\hbar\omega$ définit l'énergie de l'excitation et $\hbar k$ son impulsion. Dans le cas d'un système à plusieurs fluides comme nous venons d'étudier, les énergies des excitations liées à chacune des vitesses sonores s'additionnent. Dans certains ouvrages, tels que dans [63], de tels modes sont nommés des phonons. Ce type de relation de dispersion pour des excitations élémentaires d'un milieu n'est généralement valable qu'à basse énergie et donc à faible impulsion. Dès que les énergies deviennent plus importantes, la relation de dispersion s'écarte du régime linéaire.

2.1.1 Le potentiel chimique et ses dérivées

Comme nous venons de le voir dans la partie précédente il est indispensable d'avoir accès au potentiel chimique ainsi qu'à ses dérivées. Pour chacune des interactions, Skyrme ou RMF, nous pouvons trouver dans la littérature les équations qui permettent d'obtenir ces quantités. Nous commencerons par l'interaction de type Skyrme en prenant les équations qui se trouvent par exemple dans l'article de Chamel et Haensel [32].

Interaction Skyrme :

Nous avons le potentiel chimique qui s'écrit :

$$\mu^a = m^a c^2 + \frac{\hbar^2 (k_F^a)^2}{2m_*^a} + U^a \quad (2.21)$$

où U^a est l'énergie potentielle d'une quasi-particule seule. Cette énergie s'obtient à partir de l'équation 1.95 et s'écrit :

$$\begin{aligned} U^a = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial n_a} = & 4C_1^m n_a - 2n_B (C_0^m - C_1^m) + (C_0^\tau - C_1^\tau) \tau_B \\ & + 2C_1^\tau \tau_a + \frac{dC_0^n}{dn_B} n_B^2 + \frac{dC_1^n}{dn_B} (2n_a - n_B)^2 \end{aligned} \quad (2.22)$$

avec $\tau_B = \tau_n + \tau_p$. Comme nous sommes à température nulle, la distribution de Fermi est une fonction échelon et la densité d'énergie cinétique τ_a s'écrit donc en

calculant l'intégrale dans 1.96 :

$$\tau_a = \frac{1}{5\pi^2} (k_F^a)^5 \quad (2.23)$$

Ainsi les dérivées partielles du potentiel chimique s'écrivent :

$$\frac{\partial \mu^a}{\partial n_b} = \frac{\hbar^2 k_F^a}{m_*^a} \left(\frac{\partial k_F^a}{\partial n_b} \right) + \frac{\hbar^2 (k_F^a)^2}{2} \left(\frac{\partial (1/m_*^a)}{\partial n_b} \right) + \left(\frac{\partial U^a}{\partial n_b} \right) \quad (2.24)$$

(Attention de ne pas confondre n_b avec la densité baryonique n_B !)

En particulier nous pouvons préciser les dérivées partielles qui interviennent dans 2.24, nous avons :

$$\frac{\partial k_F^a}{\partial n_b} = \left(\frac{\pi}{3} \right)^{2/3} n_a^{-1/3} \delta_{ab} \quad (2.25)$$

où δ_{ab} définit le symbole de Kronecker. À partir de 1.103 nous trouvons :

$$\frac{\partial (1/m_*^a)}{\partial n_b} = \frac{2}{\hbar^2} [(C_0^\tau - C_1^\tau) + 2C_1^\tau \delta_{ab}] \quad (2.26)$$

et enfin nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^a}{\partial n_b} &= \frac{1}{2} t_0 [(2 + x_0) - (1 + 2x_0) \delta_{ab}] \\ &+ \frac{1}{24} t_3 (2 + x_3) (2 + \gamma) (\gamma + 1) n_B^\gamma \\ &- \frac{1}{24} t_3 (2x_3 + 1) [2\gamma n_B^{\gamma-1} n_a + 2n_B^\gamma \delta_{ab} \\ &\quad + \gamma(\gamma - 1) n_B^{\gamma-2} (n_n^2 + n_p^2) + 2\gamma n_B^{\gamma-1} n_b] \\ &+ \frac{1}{8} [t_1 (2 + x_1) + t_2 (2 + x_2)] \frac{\partial \tau}{\partial n_b} \\ &+ \frac{1}{8} [t_2 (2x_2 + 1) - t_1 (2x_1 + 1)] \frac{\partial \tau_a}{\partial n_b} \end{aligned} \quad (2.27)$$

À partir de 2.23 nous avons :

$$\frac{\partial \tau_a}{\partial n_b} = \frac{1}{\pi^2} (k_F^a)^4 \frac{\partial k_F^a}{\partial n_b} \quad (2.28)$$

Interaction RMF :

Dans le cas de l'interaction de type champ moyen relativiste l'expression du potentiel chimique va dépendre du type de couplage. Nous retrouvons chacune des formulations soit dans Gusakov et al. [53] pour les couplages constants soit dans Avancini et al. [6] pour les couplages dépendant de la densité. Nous réunirons ces deux expressions en une seule formulation :

$$\mu^a = \Gamma_\omega \omega^0 + \frac{\Gamma_\rho}{2} \tau_{3a} \rho^0 + m_*^a c^2 + \Sigma_0^R \quad (2.29)$$

où Σ_0^R est un terme réarrangement qui disparaît dans le cas des couplages constants. Le terme de réarrangement s'écrit en particulier :

$$\Sigma_0^R = \frac{\partial \Gamma_\omega}{\partial n_B} n_B \omega^0 + \frac{\partial \Gamma_\rho}{\partial n_B} n_3 \frac{\rho^0}{2} - \frac{\partial \Gamma_\sigma}{\partial n_B} n_s \sigma - \frac{\partial \Gamma_\delta}{\partial n_B} n_{s3} \delta_3 \quad (2.30)$$

Le potentiel chimique se réécrit en termes de densités de la manière suivante :

$$\mu^a = \frac{\hbar^3}{c} \left[\frac{\Gamma_\omega^2}{m_\omega^2} n_B + \frac{\Gamma_\rho^2}{4m_\rho^2} \tau_{3a} (n_p - n_n) \right] + m_*^a c^2 + \Sigma_0^R \quad (2.31)$$

Le terme de réarrangement se réécrit quant à lui :

$$\Sigma_0^R = \frac{\hbar^3}{c} \left[\frac{\partial \Gamma_\omega}{\partial n_B} \frac{\Gamma_\omega}{m_\omega^2} n_B^2 + \frac{\partial \Gamma_\rho}{\partial n_B} \frac{\Gamma_\rho}{4m_\rho^2} n_3^2 - \frac{\partial \Gamma_\sigma}{\partial n_B} \frac{\Gamma_\sigma}{m_\sigma^2} n_s^2 - \frac{\partial \Gamma_\delta}{\partial n_B} \frac{\Gamma_\delta}{m_\delta^2} n_{s3}^2 \right] \quad (2.32)$$

Nous allons faire la distinction entre les types de couplages pour exprimer les dérivées partielles du potentiel chimique :

- Dans le cas des couplages constants nous avons simplement :

$$\frac{\partial \mu^a}{\partial n_b} = \frac{\hbar^3}{c} \left[\frac{\Gamma_\omega^2}{m_\omega^2} + \frac{\Gamma_\rho^2}{4m_\rho^2} \tau_{3a} \tau_{3b} \right] + (\hbar c)^2 \frac{k_F^a}{m_*^a} \left(\frac{\partial k_F^a}{\partial n_b} \right) + c^2 \frac{m_\oplus^a}{m_*^a} \left(\frac{\partial m_\oplus^a}{\partial n_b} \right) \quad (2.33)$$

- Dans le cas des couplages dépendants de la densité nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu^a}{\partial n_b} &= \frac{\hbar^3}{c} \left[2 \frac{\partial \Gamma_\omega}{\partial n_B} \frac{\Gamma_\omega}{m_\omega^2} n_B + \frac{\Gamma_\omega^2}{m_\omega^2} + 2 \frac{\partial \Gamma_\rho}{\partial n_B} \frac{\Gamma_\rho}{4m_\rho^2} n_3 + \frac{\Gamma_\rho^2}{4m_\rho^2} \tau_{3a} \tau_{3b} \right] \\ &+ (\hbar c)^2 \frac{k_F^a}{m_*^a} \left(\frac{\partial k_F^a}{\partial n_b} \right) + c^2 \frac{m_\oplus^a}{m_*^a} \left(\frac{\partial m_\oplus^a}{\partial n_b} \right) \\ &+ \frac{\partial \Sigma_0^R}{\partial n_b} \end{aligned} \quad (2.34)$$

La dérivée partielle du terme de réarrangement s'écrit :

$$\begin{aligned}
\frac{c}{\hbar^3} \left(\frac{\partial \Sigma_0^R}{\partial n_b} \right) &= \frac{\partial^2 \Gamma_\omega}{\partial n_B^2} \frac{\Gamma_\omega}{m_\omega^2} n_B^2 + \left(\frac{\partial \Gamma_\omega}{\partial n_B} \right)^2 \frac{n_B^2}{m_\omega^2} + 2 \frac{\partial \Gamma_\omega}{\partial n_B} \frac{\Gamma_\omega}{m_\omega^2} n_B \\
&+ \frac{\partial^2 \Gamma_\rho}{\partial n_B^2} \frac{\Gamma_\rho}{4m_\rho^2} n_3^2 + \left(\frac{\partial \Gamma_\rho}{\partial n_B} \right)^2 \frac{n_3^2}{4m_\rho^2} + \frac{\partial \Gamma_\rho}{\partial n_B} \frac{\Gamma_\rho}{2m_\rho^2} \tau_{3b} n_3 \\
&- \frac{\partial^2 \Gamma_\sigma}{\partial n_B^2} \frac{\Gamma_\sigma}{m_\sigma^2} n_s^2 - \left(\frac{\partial \Gamma_\sigma}{\partial n_B} \right)^2 \frac{n_s^2}{m_\sigma^2} - 2 \frac{\partial \Gamma_\sigma}{\partial n_B} \frac{\Gamma_\sigma}{m_\sigma^2} \frac{\partial n_s}{\partial n_B} n_s \\
&- \frac{\partial \Gamma_\delta}{\partial n_B} \frac{\Gamma_\delta}{m_\delta^2} n_{s3}^2 - \left(\frac{\partial^2 \Gamma_\delta}{\partial n_B^2} \right)^2 \frac{n_{s3}^2}{m_\delta^2} n_{s3}^2 - 2 \frac{\partial \Gamma_\delta}{\partial n_B} \frac{\Gamma_\delta}{m_\delta^2} \frac{\partial n_s}{\partial n_B} \tau_{3b} n_{s3}
\end{aligned} \quad (2.35)$$

Les dérivées partielles des couplages s'obtiennent à partir de leurs expressions dans les équations 1.127, 1.128 et 1.129. Concernant les mésons de type $l = \sigma, \omega$, les dérivées des couplages s'écrivent :

$$\frac{\partial \Gamma_l}{\partial n_B}(n_B) = \frac{\Gamma_l(n_0)}{n_0} 2a_l(x + d_l) \left[\frac{b_l}{1 + c_l(x + d_l)^2} - \frac{c_l(1 + b_l(x + d_l)^2)}{(1 + c_l(x + d_l)^2)^2} \right] \quad (2.36)$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Gamma_l}{\partial n_B^2}(n_B) &= \frac{1}{n_0(x + d_l)} \frac{\partial \Gamma_l}{\partial n_B} \\
&- \frac{8\Gamma_l(n_0)}{n_0^2} \frac{a_l b_l c_l (x + d_l)^2}{(1 + c_l(x + d_l)^2)^2} \\
&+ \frac{8\Gamma_l(n_0)}{n_0^2} \frac{a_l c_l^2 (x + d_l)^2}{(1 + c_l(x + d_l)^2)^3} (1 + b_l(x + d_l)^2)
\end{aligned} \quad (2.37)$$

avec $x = \frac{n_B}{n_0}$ et $n_0 = 0.153 \text{ fm}^{-3}$.

Et pour les mésons de types $l = \rho, \delta$ nous avons :

$$\frac{\partial \Gamma_l}{\partial n_B}(n_B) = -\frac{\Gamma_l(n_0)}{n_0} [a_l b_l \exp(-b_l(x - 1)) + c_l] \quad (2.38)$$

et

$$\frac{\partial^2 \Gamma_l}{\partial n_B^2}(n_B) = \frac{\Gamma_l(n_0)}{n_0^2} a_l b_l^2 \exp(-b_l(x - 1)) \quad (2.39)$$

toujours avec $x = \frac{n_B}{n_0}$ et $n_0 = 0.153 \text{ fm}^{-3}$.

La dérivée partielle du vecteur d'onde de Fermi reste la même que dans l'équation 2.25. Par contre il n'y a pas d'expression analytique pour la dérivée partielle de

la masse de Dirac m_{\oplus}^a . Nous l'obtenons en résolvant des équations auto-cohérentes 1.118 et 1.120 après les avoir dérivées. La première équation à résoudre est donc :

$$\frac{\partial n_{sn}}{\partial n_b} + \frac{\partial n_{sp}}{\partial n_b} = -\frac{2m_{\sigma}^2}{\Gamma_{\sigma}^3} \frac{\partial \Gamma_{\sigma}}{\partial n_b} \left(m - \frac{m_{\oplus}^n + m_{\oplus}^p}{2} \right) - \frac{m_{\sigma}^2}{2\Gamma_{\sigma}^2} \left(\frac{\partial m_{\oplus}^n}{\partial n_b} + \frac{\partial m_{\oplus}^p}{\partial n_b} \right) \quad (2.40)$$

à laquelle il faut ajouter au terme de droite la quantité :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial n_b} &= \frac{a}{\Gamma_{\sigma}^3} \left(\frac{\partial m_{\oplus}^n}{\partial n_b} + \frac{\partial m_{\oplus}^p}{\partial n_b} \right) \left(m - \frac{m_{\oplus}^n + m_{\oplus}^p}{2} \right) \\ &+ \frac{3b}{2\Gamma_{\sigma}^4} \left(\frac{\partial m_{\oplus}^n}{\partial n_b} + \frac{\partial m_{\oplus}^p}{\partial n_b} \right) \left(m - \frac{m_{\oplus}^n + m_{\oplus}^p}{2} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.41)$$

si les coefficients non linéaires sont pris en compte.

La seconde équation est :

$$\frac{\partial m_{\oplus}^n}{\partial n_b} - \frac{\partial m_{\oplus}^p}{\partial n_b} = \frac{2\Gamma_{\delta}^2}{m_{\delta}^2} \frac{\partial \Gamma_{\delta}}{\partial n_b} [n_{sn}(m_{\oplus}^n) - n_{sp}(m_{\oplus}^p)] + \frac{\Gamma_{\delta}^2}{m_{\delta}^2} \left(\frac{\partial n_{sn}}{\partial n_b} + \frac{\partial n_{sp}}{\partial n_b} \right) \quad (2.42)$$

Sachant que la dérivée partielle de la densité scalaire s'obtient en faisant les décompositions suivantes :

$$\frac{\partial n_{sa}}{\partial n_b} = \frac{\partial n_{sa}}{\partial k_F^a} \frac{\partial k_F^a}{\partial n_b} + \frac{\partial n_{sa}}{\partial m_{\oplus}^a} \frac{\partial m_{\oplus}^a}{\partial n_b} \quad (2.43)$$

D'après 1.114 il est facile de vérifier que :

$$\frac{\partial n_{sa}}{\partial k_F^a} = \frac{1}{\pi^2} \frac{m_{\oplus}^a c^2 (k_F^a)^2}{\sqrt{(\hbar c)^2 (k_F^a)^2 + (m_{\oplus}^a)^2 c^4}} \quad (2.44)$$

Enfin d'après 1.117 nous trouvons :

$$\frac{\partial n_{sa}}{\partial m_{\oplus}^a} = \frac{n_{sa}}{m_{\oplus}^a} + \frac{c}{2\pi^2 \hbar^3} m_{\oplus}^a \left[\frac{2p_F^a m_{\oplus}^a c}{m_*^a} - 2m_{\oplus}^a c^2 \ln \left(\frac{p_F^a + m_*^a c}{m_{\oplus}^a c} \right) \right] \quad (2.45)$$

Les équations 2.40 et 2.42 sont résolues grâce à une méthode de Newton-Raphson aussi.

L'ensemble des dérivées partielles exprimées ici nous permet maintenant de calculer numériquement les valeurs des vitesses du son et ensuite d'obtenir les vecteurs propres du système 2.12.

2.1.2 Vitesses du son

Dans cette partie nous allons donner quelques résultats numériques pour les vitesses du son dans la matière nucléaire homogène à l'équilibre statique et dans les conditions qui nous intéressent, c'est-à-dire à température nulle et à l'équilibre β . Ces résultats nous donneront une première base comparative pour la suite de notre étude.

Mais avant de déterminer numériquement les vitesses du son il est indispensable de déterminer la proportion de neutrons et de protons à densité baryonique fixée pour être dans les conditions de l'équilibre β . La première équation consiste à reprendre la neutralité locale de la matière :

$$n_p = n_e \quad (2.46)$$

Enfin l'équilibre β correspond à l'équilibre de l'équation de transformation suivante :

$$n \rightleftharpoons p + e + \bar{\nu} \quad (2.47)$$

Ce qui revient à égaliser les potentiels chimiques de part et d'autre de cette équation de réaction, c'est-à-dire que nous avons :

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e \quad (2.48)$$

Sachant que nous sommes dans des conditions telles que les neutrinos et anti-neutrinos s'échappent de l'étoile à neutrons dès leur création, ainsi leurs potentiels chimiques n'interviennent pas ici. Puisque nous avons neutralité locale de la matière, le potentiel chimique des électrons, hors interaction électrique, s'écrit :

$$\mu_e = \sqrt{m_e^2 c^4 + (\hbar c)^2 (k_F^e)^2} \quad (2.49)$$

Et bien sûr nous avons la densité baryonique qui par définition est :

$$n_B = n_p + n_n \quad (2.50)$$

Le système de trois équations 2.46, 2.48 et 2.50 aux variables n_n , n_p , et n_e est donc fermé, nous pouvons maintenant déterminer la proportion de chaque particule à densité baryonique fixée. Et pour cela nous utiliserons une méthode de la sécante.

Pour chacune des deux interactions utilisées, DDH δ et SLy4, nous avons résolu ce système d'équations pour des densités baryonique variant entre 0.008 fm^{-3} et 0.3 fm^{-3} . Sur la figure 2.1 nous montrons la proportion de protons en fonction de la densité baryonique pour ces deux interactions. Sur cette figure 2.1 nous constatons que la proportion de protons varie de moins de 1 % aux faibles densités et atteint quelques pour-cents à 0.3 fm^{-3} . Ce sont des quantités raisonnables et attendues

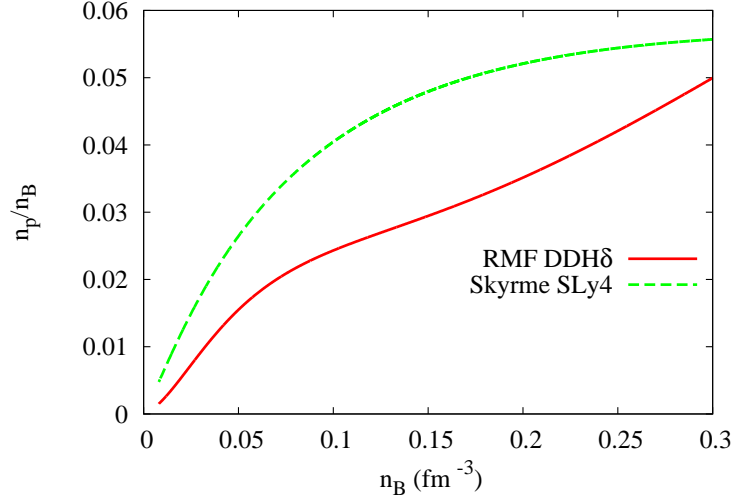


FIG. 2.1: Proportion de protons pour la matière nucléaire à l'équilibre β et à température nulle avec l'interaction de type RMF DDH δ et de type Skyrme SLy4 pour n_B entre 0.008 fm^{-3} et 0.3 fm^{-3} .

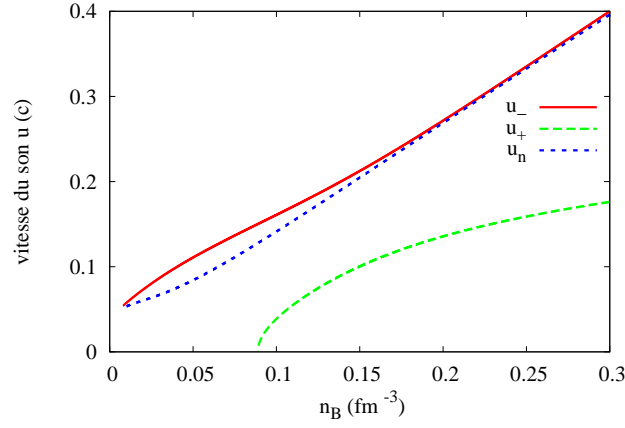
pour les étoiles à neutrons bien qu'à faible densité, où la matière est structurée en noyaux plutôt que sous forme de liquides relativement homogènes, la proportion de protons tend vers une symétrisation de la matière nucléaire.

À partir de ces données nous pouvons calculer les vitesses du son u_{\pm} données par l'équation 2.15. L'équation 2.12 nous a permis quant à elle de déterminer quels sont les mouvements des protons et des neutrons. Ainsi nous associerons le symbole + au mode isoscalaire où les neutrons et les protons décrivent un mouvement en phase et nous donnerons le symbole – au mode isovectoriel où les neutrons et les protons décrivent un mouvement en opposition de phase.

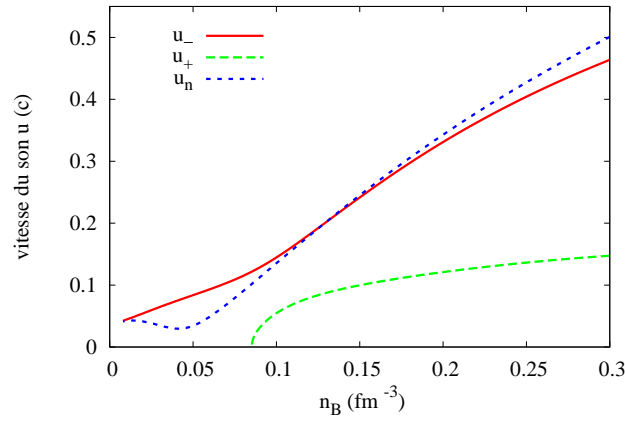
Enfin, comme la matière est composée majoritairement de neutrons nous donnerons à titre indicatif la vitesse du son u_n associée à la compression des neutrons seuls, les protons n'effectuant pas de mouvement. Cette vitesse est donnée par l'équation :

$$u_a^2 = \left(\frac{n_a}{m^a} \frac{\partial \mu^a}{\partial n_a} \right) = \left(\frac{1}{m^a} \frac{\partial P}{\partial n_a} \right) \quad (2.51)$$

Sur les figures 2.2a et 2.2b nous constatons que les vitesses du son atteignent quelques dixièmes de la vitesse de la lumière à haute densité pour chacune des



(a) SLy4



(b) DDHδ

FIG. 2.2: Vitesses du son pour la matière nucléaire à l'équilibre β et à température nulle avec l'interaction de type Skyrme SLy4 en (a) et de type RMF DDH δ en (b) pour n_B entre 0.008 fm^{-3} et 0.3 fm^{-3} .

interactions ce qui est cohérent avec les propriétés de la matière nucléaire dans ces conditions.

Par ailleurs, nous observons que le mode isovectoriel — est relativement proche du mode de compression des neutrons seuls bien qu'il s'en éloigne à plus faible

densité.

Concernant le comportement du mode isoscalaire, il est associé à une vitesse du son plus faible que pour le mode isovectoriel. Le point remarquable est que ce mode disparaît ne laissant place plus qu'à un seul mode sonore pour des densités baryoniques inférieures à environ 0.1 fm^{-3} , là où la matière est sensée devenir structurée. La densité pour laquelle ce mode disparaît correspond à $n_B = 0.0889 \text{ fm}^{-3}$ pour l'interaction Sly4 et $n_B = 0.0852 \text{ fm}^{-3}$ pour l'interaction DDH δ . Cette disparition peut s'expliquer plus en détail par le fait que la quantité $C = \frac{\partial \mu^n}{\partial n_n} \frac{\partial \mu^p}{\partial n_p} - \frac{\partial \mu^n}{\partial n_p} \frac{\partial \mu^p}{\partial n_n}$, dans l'équation 2.15, devient négative en dessous d'une certaine densité. Ainsi nous trouvons qu'une des solutions u^2 est négative, ce qui n'est évidemment pas admissible pour trouver une vitesse du son. Mais ceci n'a rien de surprenant sachant que la matrice composée des éléments $\frac{\partial \mu^a}{\partial n_b}$ représente en fait la matrice de courbure de l'énergie libre. Or, lorsque cette matrice admet une valeur propre négative nous sommes dans une zone « spinodale » où la matière homogène est localement instable. De plus, lorsque l'une des deux valeurs propre de cette matrice est négative, nous avons alors son déterminant qui est négatif. Ainsi, en sachant qu'il est bien établi qu'à faible densité la matière nucléaire entre dans une zone « spinodale » [5, 40], nous retrouvons le fait que le mode isoscalaire disparaît.

Ces quelques résultats préliminaires concernant la propagation de la vitesse du son dans la matière homogène à l'équilibre β nous fourniront une base pour faire la comparaison avec les effets dus aux structures sur la propagation des modes hydrodynamiques.

2.2 La croûte interne : la phase « pasta »

Nous venons d'étudier jusqu'à présent la propagation de modes hydrodynamiques dans la matière homogène. Le cœur de ce projet consiste à étudier la propagation de ces modes dans la croûte interne où la matière n'est plus homogène. En effet, comme nous l'avons précisé en introduction, les étoiles à neutrons ne sont pas que de simples boules homogènes de matière nucléaire. Pour beaucoup d'objets dans l'univers, la gravitation qui s'exerce au sein d'un même objet a pour effet de les structurer. Cette structuration prend son origine précisément dans le gradient du potentiel gravitationnel. Car celui-ci va principalement différencier les éléments de différentes espèces en faisant plonger vers le centre ceux plus massifs ou alors en créant un gradient de densité quand la matière est compressible. Les étoiles à neutrons n'échappent pas à cette règle non plus et se structurent en couches aux propriétés bien différentes [33]. En ce qui nous concerne nous nous intéresserons à une couche en particulier, appelée croûte interne. Elle est généralement définie

comme la partie où la densité de matière est comprise entre $n_B \approx 0.08 \text{ fm}^{-3} \approx n_0/2$ et $n_B \approx 0.001 \text{ fm}^{-3} \approx n_0/100$. Elle est aussi la couche qui vient juste au-dessus du noyaux de l'étoile à neutrons. Ce qui en fait la partie de l'étoile qui contient les premières inhomogénéités. C'est d'ailleurs ainsi que nous pourrions la définir puisqu'elle correspond à la transition entre matière homogène et matière structurée en noyaux. Cette couche fait encore l'objet de beaucoup de spéculations mais de nombreux éléments, dont des approches numériques complètement différentes, viennent corroborer les concepts généraux liés à cette partie de l'étoile. Globalement trois idées viennent fonder la théorie de la croûte interne, l'échappement de neutrons des noyaux (« neutron drip ») qui fait coexister deux phases denses et moins denses, le changement de géométries et la minimisation de l'énergie. Ces trois ingrédients réunis ont donné la notion de phase « pasta » évoquée pour la première fois en 1983 par Ravenhall et al. [84] et indépendamment en 1984 par Hashimoto et al. [54].

L'échappement des neutrons provient en quelque sorte de l'augmentation de manière excessive du nombre de nucléons présents dans les noyaux atomiques de la croûte externe lorsque la densité s'accroît avec la profondeur dans l'étoile. En raison notamment de l'interaction coulombienne, la matière s'écarte de la symétrie, privilégiant les neutrons et à partir d'un certain point les noyaux sont « tellement » riches en neutrons que ceux-ci peuvent s'en échapper. À ce moment là nous sommes en présence de phases coexistantes, c'est-à-dire que nous avons des noyaux, assimilés à la phase dense, qui sont plongés dans un gaz de neutrons libres. C'est le premier point essentiel pour comprendre la croûte interne. L'échappement des protons a aussi été considéré mais reste assez dépendant du type d'interaction choisi et n'a lieu qu'à très haute densité. Il résulte de la plupart des simulations que dans la majeure partie de la croûte interne, les protons restent confinés et ne s'échappent pas. Notamment lorsque la matière est relativement stabilisé à l'équilibre β et ne contient donc pas beaucoup de protons. Il est donc courant de voir les structures de la croûte interne présentées avec seulement les neutrons qui s'échappent. Dans la suite de notre étude nous tenterons de garder le formalisme le plus générale où les protons sont présent partout et nous spécifierons à chaque fois que c'est nécessaire le cas où les protons sont confinés.

Ensuite l'idée géniale, qu'ont eue Ravenhall, Pethick et Wilson en 1983 ou Hashimoto, Seki et Yamada en 1984, fut de voir autrement les structures dans l'espace, de prendre du recul et de dépasser les concepts communément admis. En effet ils ont considéré que la géométrie en sphère, largement acquise à l'époque, n'était pas l'unique géométrie admise et que d'autres possibilités pouvaient être abordées. Ils ont donc imaginé des structures cylindriques et voire même en plaques, qui pouvaient être considérées au même titre que celles sphériques.

Une fois ces concepts admis, la construction théorique de la croûte interne peut

être démarrée, en se fondant sur un principe de minimisation de l'énergie. C'est en procédant ainsi que nous pourrions quantifier ces structures en terme de formes, tailles, densités... Essayons maintenant de comprendre plus en détails les mécanismes qui mènent à ces structures originales. Pour cela nous allons adopter une approche simplifiée, en prenant le modèle de la goutte liquide pour la matière, en négligeant la plupart des effets mineurs tels que ceux dûs à la température... et enfin nous allons placer cette étude dans le cadre d'une approche par des cellules de Wigner-Seitz [79]. À densité baryonique moyenne fixée, la proportion de nucléons dans la partie dense, étiquetée I et dans la partie gazeuse, étiquetée II , est déterminée en minimisant la densité d'énergie moyenne. Une des premières conditions, est que les nucléons de plus haute énergie dans le gaz ne dépasse pas l'énergie des nucléons dans les noyaux denses. Ce qui nous conduit à l'égalisation des potentiels chimiques des nucléons de chaque espèce entre la phase dense et la phase gazeuse c'est-à-dire $\mu_I^a = \mu_{II}^a$. Puis en faisant varier le volume, la minimisation de l'énergie nous conduit à égaliser les pressions entre les deux phases, soit $P_I = P_{II}$. Mais ces égalités sont obtenues indépendamment de toutes considérations géométriques. La clef permettant de comprendre les géométries provient de l'énergie de surface. Deux types d'énergies font intervenir les formes des structures, l'énergie de surface due à l'interaction nucléaire, \mathcal{E}_{surf} , et celle créée par l'interaction électrique de Coulomb entre protons \mathcal{E}_{Coul} . L'énergie de surface s'écrit :

$$\mathcal{E}_{surf} = \frac{u\sigma d}{r_N} \quad (2.52)$$

où d représente la dimension géométrique de la structure, avec $d = 1$ pour les plaques, $d = 2$ pour les cylindres et $d = 3$ pour les sphères. Nous avons σ qui désigne la tension de surface et $u = (r_N/R_{cell})^d$ qui définit la fraction de volume occupée par le noyau de rayon r_N plongé dans la cellule de Wigner-Seitz de rayon R_{cell} .

L'énergie de Coulomb s'écrit quant à elle :

$$\mathcal{E}_{Coul} = 2\pi(n_p^N e r_N)^2 u f_d(u) \quad (2.53)$$

avec e la charge de l'électron et n_p^N la densité de proton dans le noyau. Nous avons aussi les fonctions f_d liées aux géométries :

$$f_3(u) = \frac{1}{5}(2 - 3u^{1/3} + u) \quad (2.54)$$

$$f_2(u) = \frac{1}{4}(\ln(1/u) - 1 + u) \quad (2.55)$$

$$f_1(u) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{u} - 2 + u\right) \quad (2.56)$$

Par ailleurs nous posons que les électrons, fortement dégénérés, sont répartis uniformément. Le choix de la forme de la structure la plus stable s'obtient donc en minimisant l'énergie $\mathcal{E}_{surf} + \mathcal{E}_{Coul}$ en fonction de la dimension d . D'après la dépendance en r_N^{-1} et r_N^2 des énergies \mathcal{E}_{surf} et \mathcal{E}_{Coul} , la minimisation de l'énergie par rapport à la variable r_N nous donne la relation fondamentale suivante :

$$\mathcal{E}_{surf} = 2\mathcal{E}_{Coul} \quad (2.57)$$

Cette relation est liée à la structure de l'espace qui comporte 3 dimensions spatiales. Maintenant à densité baryonique et à proportion de protons fixée nous pouvons trouver quelle est la forme de structure préférée par la matière selon le type d'interaction nucléaire considérée. Nous nous apercevons que ces structures, aux géométries diverses, apparaissent là où l'interaction électromagnétique vient contrebalancer l'interaction nucléaire.

De ce fait si nous regardions une coupe de la croûte interne d'une étoile à neutrons nous pourrions retrouver une succession de structures telles que sur la figure 2.3. En partant de l'extérieur, à gauche sur la figure, nous avons tout d'abord un réseau cristallin de noyaux sphériques entourés de « vide ». Au fur et à mesure que la densité s'accroît, l'interaction Coulombienne s'approche de l'énergie de surface nucléaire ce qui a pour effet de déformer de plus en plus les noyaux leur donnant une forme ellipsoïdale. Puis en augmentant encore la densité, les neutrons commencent à s'échapper des noyaux quasi-sphériques pour former un gaz. À un certain point les noyaux sont tellement allongés qu'ils finissent par se relier entre eux et former des cylindres de matière nucléaire dense toujours plongés dans un gaz de neutrons. Par ce même processus de déformation il se peut que les structures deviennent planes, formant une alternance de matière nucléaire dense et de gaz de neutrons moins dense. Et à partir de là, la tendance s'inverse et c'est la matière dense qui va remplir l'espace et quelques bulles cylindriques, puis sphériques, vont apparaître jusqu'à ce que la matière devienne totalement homogène. L'ensemble de ces structures est appelée phase « pasta » par analogie avec les formes de pâtes (spaghetti, lasagnes, gnocchi) qu'elles ont.

Ce changement de géométries au fil de l'augmentation de la densité pourrait être schématisé de la manière suivante sur la figure 2.4 en rouge. Avec l'interaction de type DDH δ utilisée dans Avancini et al. [6] nous pouvons observer l'évolution des géométries de structures en fonction de la densité dans les conditions de température nulle et à l'équilibre β . Dans ce cas, cette transition a lieu entre 0.05 fm^{-3} et 0.09 fm^{-3} . Les noyaux denses et sphériques à 3 dimensions sont désignés par 3N, ceux de forme cylindrique par 2N, les structures en plaques par le chiffre 1, et enfin de la même manière 2B et 3B désignent les bulles de formes cylindriques et sphériques de matière moins dense plongées dans la matière nucléaire. La courbe continue en noir sur la figure 2.4 est une représentation arbitraire de ce que pour-

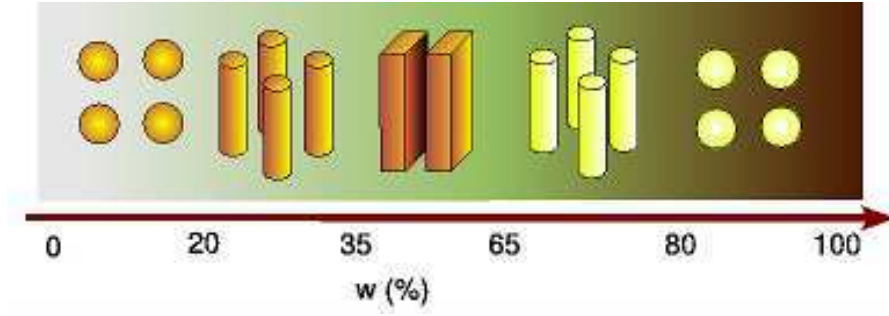


FIG. 2.3: Schéma représentant la succession possible de structures en fonction de la proportion de phase nucléaire dense w , Chamel et Haensel [33] .

rait être réellement l'évolution des géométries. Le passage se faisant de manière continue, mélangeant à certaines densités plusieurs types de géométries.

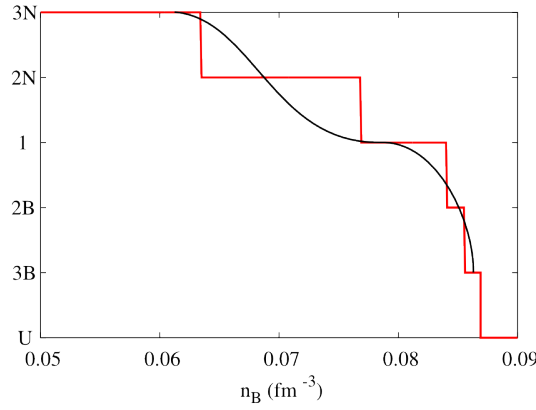


FIG. 2.4: Schéma d'évolution des géométries inspiré de Ravenhall et al. [84] fondé sur des résultats de [6] avec l'interaction DDH δ .

Il faut bien comprendre que cette modélisation en sphères, cylindres et plaques, bien organisés sous forme de réseaux n'est qu'une représentation simplifiée de ce que pourraient être ces structures en réalité. Certainement que les tubes ne sont pas forcément bien alignés entre eux, le réseau n'est pas forcément aussi propre que nous le supposons, les structures de plusieurs formes se mélangent peut être parfois, notamment si l'on considère une température non nulle. Depuis 1983 de nombreux travaux sont venus alimenter la littérature sur le sujet afin de mieux comprendre et mieux modéliser la croûte interne des étoiles à neutrons dont voici une liste non exhaustive [65, 75, 79, 101, 102, 7, 6]. Il est intéressant de remarquer

qu’une approche, assez différente, par la dynamique quantique moléculaire est arrivée à former des structures similaires. En effet dans [102], Watanabe et ses collaborateurs ont pris une boîte contenant quelques milliers de particules soumises à l’interaction nucléaire de type Skyrme, la taille de la boîte étant fixée pour obtenir la densité de particules souhaitée. Ces particules ont été placées hors équilibre et via un algorithme de dynamique quantique moléculaire elles ont évolué jusqu’à atteindre un certain équilibre du système. Leurs simulations ont remarquablement bien reproduit les structures prédites par la théorie, avec l’apparition de structures de chaque dimension selon la densité. Sur l’exemple figure 2.5 issu des travaux de

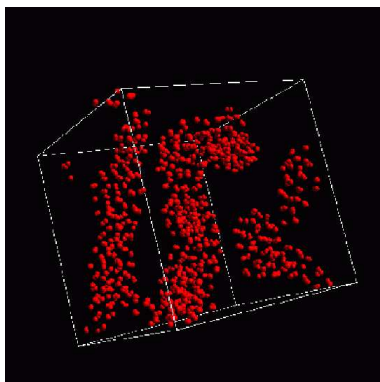


FIG. 2.5: Répartitions des protons en cylindres obtenus par simulation de dynamique quantique moléculaire à densité $n_B = 0.033 \text{ fm}^{-3}$ et avec 10 % de protons [102].

Watanabe et ses collaborateurs [102] nous voyons uniquement la répartition des protons qui viennent ici épouser des formes quasi-cylindriques. Mais évidemment, comme nous venons de le dire, ces cylindres ne sont clairement pas alignés aussi proprement que dans les modèles théoriques simplifiés.

Par ailleurs certaines approches vont même au-delà de ces simples formes géométriques. Dans Nakazato et al. [71] des formes plus complexes mais peut-être complémentaires sont abordées comme nous pouvons le voir sur la figure 2.6 suivante.

Enfin pour terminer cette section, nous pourrions remarquer que très souvent la modélisation de ce type de structures fait apparaître des discontinuités en densités. Or il n’est pas évident que cette approximation soit bien réaliste. Ainsi une autre façon de modéliser ces structures consisterait à les représenter en terme d’oscillations continues de densités, comme le suggère la figure 2.7 tirée de [75]. Puis selon le type de structures considérées, à une, deux ou trois dimensions, ces oscillations de densités seraient observées sur autant de directions qu’il y a de dimensions

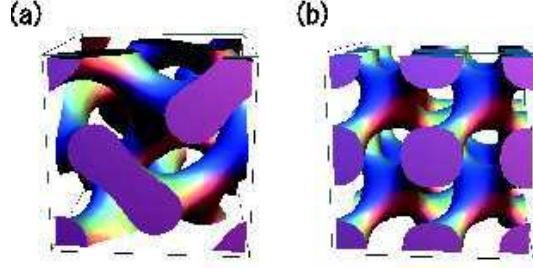


FIG. 2.6: Structures en forme de gyroïde (a) et en diamant (b) simulées par Nakazato et al. [71].

associée à la structure.

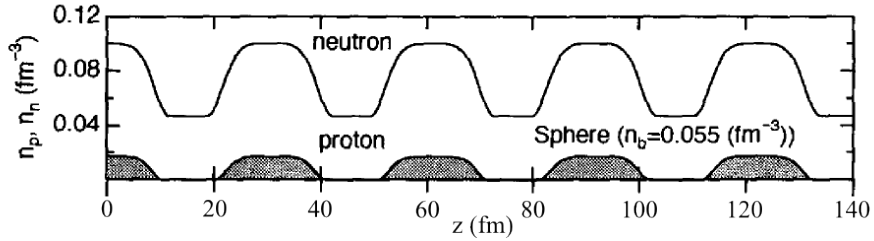


FIG. 2.7: Oscillations de densités de neutrons et de protons selon une direction d'alignement des structures, ici z , d'après les résultats de [75] pour des structures en sphères à densité $n_B = 0.055 \text{ fm}^{-3}$.

2.3 Conditions aux bords

Maintenant que nous venons d'introduire brièvement la manière dont la matière pourrait se structurer dans la croûte interne des étoiles à neutrons, nous allons tenter de déterminer comment les modes hydrodynamiques se propagent à travers celles-ci. Il est donc nécessaire de bien comprendre comment se comporte la matière dans ce milieu et en particulier aux interfaces. Nous aurons donc besoin de définir des conditions aux bords avant tout. C'est dans cette section que l'essentiel du problème théorique se pose, car nous savons qu'une bonne partie des phénomènes physiques se passent aux bords. Plusieurs ouvrages de référence [62, 69, 97, 19, 36] traitent de la propagation d'ondes sonores dans des fluides ayant des interfaces et nous exploiterons les méthodes que les auteurs ont développées pour ce sujet. Par contre la littérature sur le sujet en particulier qui nous intéresse, est assez

succincte et seules quelques articles ont abordé ce problème, notamment sur l'interface liquide-gaz pour un mélange d'hélium ^3He - ^4He superfluide [83, 104, 60]. Ainsi nous nous inspirerons largement de ces quelques publications pour établir notre modèle théorique. Et afin de mieux comprendre les difficultés qui se posent, nous choisirons de définir plusieurs types de conditions aux bords liées chacune à une approximation particulière.

2.3.1 Modélisation des structures

Pour déterminer comment se propagent les perturbations à travers ces inhomogénéités nous aurions naturellement envie de choisir une vision de ces structures en termes d'oscillations de densités telles que dans [75]. Mais contrairement à ce que nous pourrions penser, cette approche complique sérieusement la résolution des équations puisqu'aux interfaces entre les phases, les vecteurs d'ondes associés aux perturbations sont des fonctions de la position. Ainsi pour n'avoir que des vecteurs d'ondes constants nous allons adopter en première approximation une construction de ces structures en terme de phases coexistantes et homogènes. Ce qui revient en quelque sorte à supprimer l'épaisseur de peau D correspondant à la transition entre les deux régions représentée sur la figure 2.8.

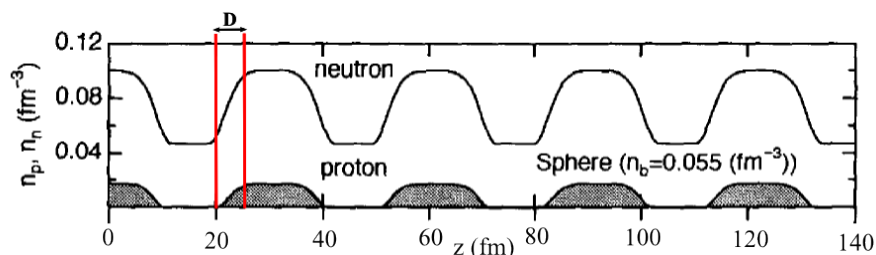


FIG. 2.8: Oscillations de densités de neutrons et de protons selon la direction z d'après les résultats de [75] pour des structures en sphères à densité $n_B = 0.055 \text{ fm}^{-3}$ avec l'épaisseur de peau D comprise entre les traits verticaux rouges.

En théorie il serait même nécessaire de définir une peau pour les neutrons et les protons, mais comme ici nous posons $D=0$ cette difficulté disparaît. Nous pourrions retrouver, par exemple, de tels raisonnements sur la présence d'une peau et de ses effets dans Lattimer et al. [65]. Nos structures seront donc constituées de phases homogènes en densité qui coexistent entre elles. Nous aurons par contre des discontinuités en densité qui seront localisées aux interfaces.

Enfin l'ensemble des caractéristiques de tailles et densités seront prises comme des données d'entrées dans notre modèle. En effet nous ne calculerons pas les caractéristiques de ces structures dans la mesure où nous avons négligé l'interaction

de Coulomb et les énergies de surfaces. Les valeurs seront prises dans un tableau que nous a gracieusement donné Constança Da Providencia issu du modèle présenté dans [6].

Notons que nous avons pris partie d'essayer de garder des protons dans toutes les phases indépendamment des structures réelles mais à chaque fois que nous précisons que certaines phases sont vides de protons, il suffira de poser $n_p = 0$ dans les équations correspondantes et nous expliciterons les simplifications qui en résultent.

2.3.2 Approximation hydrodynamique

Par ailleurs, nous l'avons supposé implicitement jusqu'à présent, mais chaque approximation nécessite d'être justifiée. Nous allons donc vérifier qu'ici il est possible d'utiliser l'hydrodynamique dans chacune des phases liquides ou gazeuses. La raison essentielle pour laquelle nous avons adopté cette approche, outre le fait qu'elle soit relativement plus simple, est qu'elle permet d'aborder des excitations du milieu qui ont des longueurs d'ondes plus grandes qu'une cellule de Wigner-Seitz. Notre modèle est en quelque sorte assez proche de ceux développés par Pethick et al. [78] pour étudier les phonons du réseau formé par la croûte ou par Cirigliano et al. [37] pour étudier les bosons de Goldstone superfluides. Mais ces auteurs ont adopté un point de vu fondé sur la limite des grandes longueurs d'ondes. En ce qui nous concerne nous voudrions nous placer dans le cas où les longueurs d'ondes sont intermédiaires et dont les effets des inhomogénéités dans la matière prennent entièrement part à l'étude de ses excitations.

Habituellement pour vérifier que l'approximation hydrodynamique est valable il est important d'analyser la longueur de cohérence de Pippard. Celle-ci se définit à l'aide de la vitesse de Fermi et de l'énergie d'appariement de la manière suivante [42, 13] :

$$\xi_0 = \frac{\hbar v_F}{\pi \Delta} \quad (2.58)$$

Cette longueur correspond à la distance jusqu'à laquelle deux particules ont la même impulsion, elle peut aussi être défini comme étant la taille d'une paire de Cooper. Cette longueur peut varier de quelques fm à plusieurs dizaine de fm pour les densités et les énergies d'appariement caractéristiques de la croûte interne.

Pour que l'approche hydrodynamique soit valable il faut que cette distance soit très inférieure aux dimensions caractéristique des variations spatiales des quantités hydrodynamiques. Tout comme les fréquences d'excitations doivent être inférieures à $\frac{\Delta}{\hbar}$. Il est possible aussi de retrouver ces exigences à partir de la dérivation microscopique des équations hydrodynamiques en utilisant les équations dépendent du temps de Bogoliubov-de Gennes [98, 100].

Autant nous pouvons « contrôler » les fréquences d'excitations dans notre modèle en imposant qu'elles soient inférieures à la limite de validité. Autant, comme nous l'avons dit précédemment, les caractéristiques des structures sont prises comme données d'entrée du modèle.

La taille des structures planes est de l'ordre de 10 fm environ, ce qui nous place dans la limite d'utilisation des équations hydrodynamiques dans ce cas. Par contre à plus faible densité, où les structures sont sphériques, la distance inter-noyaux varie de 11.4 fm à 47.5 fm. Ce qui nous place dans un meilleur cadre d'application de l'hydrodynamique dans ce milieu. Seul un bémol vient poser problème, en effet à l'intérieur des noyaux, d'un peu plus de 10 fm, l'hydrodynamique est toujours à la limite de validité.

En toute rigueur nous ne devrions donc pas utiliser ces équations dans ce cas. Mais il faut comprendre qu'en outrepassant ces limitations, nous débroussaillons une première étude sur ce sujet qui n'a pas encore été exploré. Nous utiliserons malgré tout ces équations et nous considérerons que l'approximation harmonique développant les perturbations en ondes planes restera valable aussi. N'oublions pas que les équations hydrodynamiques ont régulièrement données des résultats plus que satisfaisants, même en dehors des limites de validité.

2.3.3 Nombre de conditions aux bords

Maintenant que nous avons défini proprement le système avec ses limites d'approches, nous allons déterminer les conditions aux bords. Afin de ne pas s'égayer dans des explications inutiles et viser directement les sources des problèmes, nous allons établir l'ensemble des variables du système et définir ensuite le nombre de conditions aux bords qu'il sera nécessaire de vérifier.

Dans chacune des phases les variables qui interviennent dans les équations hydrodynamiques sont au nombre de six par composant, trois sont de types scalaires, π^a , μ^a et n_a , et trois sont de types vectorielles, \mathbf{n}_a , \mathbf{v}_a et \mathbf{p}^a . Certaines de ces variables peuvent sembler redondantes mais dans la mesure où elles caractérisent une quantité physique différente il est important de les distinguer. Car chaque condition aux bords sera fondée sur des approximations et des phénomènes physiques différents qui peuvent faire intervenir indépendamment l'une ou l'autre de ces variables. Pour être complets dans l'étude du problème, nous ajouterons comme variable possible la pression du système P .

Enfin pour trouver le nombre de conditions aux bords nécessaires, nous allons commencer par essayer de comprendre quel sens donner à ce terme de condition aux bords. Ce qui revient à se demander à quoi peuvent-elles servir. En effet, comme nous l'avons dit précédemment, nous souhaitons étudier des excitations aux longueurs d'ondes plus grandes qu'une structure. Cette hypothèse implique que les perturbations se propagent à travers ces structures. Il faudra donc dé-

terminer comment elles se communiquent d'une phase à l'autre au niveau des interfaces. Classiquement de tels problèmes donnent lieu à définir des coefficients de transmission et de réflexion, qui eux même sont le résultat de contraintes sur certaines variables que nous aurons imposé aux interfaces. Ces conditions aux bords ne sont évidemment pas le fruit du hasard mais le résultat de mûres réflexions sur le comportement de la matière aux niveaux des surfaces séparant les discontinuités appelées interfaces. Sur cette surface localisée spatialement certaines quantités physiques seront conservées à tout instant, donnant naissance à des lois de continuités pour certaines variables. Une telle assertion nous indique déjà que les variables qui sont discontinues de part et d'autre de la surface à l'équilibre pourront difficilement définir de conditions aux bords dans notre étude. Sont à compter essentiellement parmi ces variables exclues, les densités n_n et n_p .

Mathématiquement une telle loi de continuité pour une variable quelconque A s'écrit de la manière suivante :

$$[A] \equiv \lim_{\substack{\mathbf{r} \rightarrow \mathcal{S} \\ \mathbf{r} \in \mathcal{M}_i}} A(t, \mathbf{r}) - \lim_{\substack{\mathbf{r} \rightarrow \mathcal{S} \\ \mathbf{r} \in \mathcal{M}_{i+1}}} A(t, \mathbf{r}) = 0 \quad (2.59)$$

où \mathcal{S} désigne la surface séparant deux milieux \mathcal{M} consécutifs numérotés i et $(i+1)$ d'après la convention que nous nous sommes fixée. C'est ainsi que seront définies la plupart des conditions aux bords et nous les écrirons à l'aide de crochets [].

Nous aurons besoin d'autant de conditions aux bords qu'il y a de paramètres libres entrant dans la description des perturbations. Si nous nous rappelons que ces perturbations se décomposent en ondes planes, nous associerons une de ces ondes à chaque mode possible. Comme nous n'avons trouvé que deux modes \pm dans la matière nucléaire nous aurons donc besoin de deux paramètres, soit un pour chaque onde associée à un mode. La prise en compte des réflexions aux interfaces implique d'avoir des ondes qui se propagent en sens opposé, ce qui a pour effet de multiplier par deux le nombre de paramètres. Ces quatre paramètres définissent des amplitudes pour les différentes ondes. Bien sûr, ces amplitudes prennent des valeurs petites dans la limite où elles doivent entraîner de petites variations des quantités physiques par rapport à l'équilibre. En toute généralité il faudra donc définir strictement quatre conditions aux bords pour déterminer complètement la transmission et la réflexion des modes hydrodynamiques aux interfaces. Nous aurons donc à définir quatre contraintes aux interfaces en jouant avec les neuf variables précitées. Nous aborderons aux cas par cas l'éventualité où l'une des phases ne contient que des neutrons. L'idée étant ici de définir un formalisme le plus générale possible.

2.3.4 Détermination des conditions aux bords

Nous allons dans cette partie essayer de définir l'ensemble des conditions aux bords qui sont physiquement acceptables en abordant les divers phénomènes physiques qui peuvent nous conduire à poser de telles contraintes.

Conditions de types cinématiques :

La formulations des équations hydrodynamiques et le choix du modèle de structures avec des surfaces de séparations nous conduit à quelques bizarreries un peu contres intuitives. En effet les deux vitesses \mathbf{v}_n et \mathbf{v}_p sont des variables indépendantes et donc à l'endroit séparant deux phases nous aurons deux surfaces de séparations \mathcal{S}_a , chacune associée à un composant.

Cela ne gêne en rien notre conception du modèle dans la mesure où nous avons formulé l'hydrodynamique avec deux composants indépendants.

Mais pour des raisons qui pourraient être liées à des effets de tension de surface ou d'énergie liée à une distance séparant ces surfaces, par exemple, il est probablement préférable de poser que les structures restent solidaires. C'est-à-dire qu'une seule et unique surface sépare les phases à tout instant. Une telle contrainte constitue déjà une condition aux bords qui se formule de la manière suivante dans la phase \mathcal{M}_i :

$$v_{\perp ni}(t, \mathbf{r}) = v_{\perp pi}(t, \mathbf{r}) \text{ pour } \mathbf{r} \in \mathcal{S} \quad (2.60)$$

où \mathcal{S} définit toujours la surface séparant deux milieux consécutifs dont un est numéroté i . Nous avons $v_{\perp ai}$ qui représente la composante perpendiculaire de la vitesse du fluide « a » dans \mathcal{M}_i sur \mathcal{S} . Pour le moment nous ne pouvons rien dire a priori quant aux effets que peut avoir cette condition sur les excitations du milieu. Nous tenterons ainsi par la suite d'explorer ces effets, dans la mesure du possible, en supprimant ou pas cette condition.

Par ailleurs, nous sommes en présence de phases qui contiennent les mêmes constituants de part et d'autre des interfaces mais à des densités différentes. Naïvement nous aurions tendance à penser que les neutrons et protons puissent passer à travers cet interface. Une telle hypothèse n'est pas sans nous rappeler le problème posé par les ondes de choc [62, 36, 88]. Dans ce cas là nous invoquerons un principe de conservation du nombre de particules. Puisqu'il n'y a pas de création de particules, la quantité de fluide de type a qui entre d'un côté de la surface de séparation doit être égale à celle qui en sort de l'autre côté. Nous en déduisons la continuité du flux de particules à travers \mathcal{S} . Mais ici se pose la question de savoir comment définir \mathcal{S} . En toute généralité nous pourrions définir une surface \mathcal{S}_a pour chaque constituant « a » ayant une vitesse $v_{\perp \mathcal{S}_a}$ à travers laquelle passeraient

le constituant « a » . Cette condition aux bords s'écrit :

$$[n_a dv_{\perp a}] = 0 \quad (2.61)$$

avec $dv_{\perp a} = v_{\perp a} - v_{\perp \mathcal{S}_a}$. Mais l'introduction de cette vitesse d'interface ajoute un paramètre supplémentaire dans le modèle. Comme en réalité nous aurons des protons confinés seulement dans une des deux phases et que les temps de transformation des protons en neutrons par interaction faible sont bien plus grand que les temps caractéristiques d'oscillation de nos perturbations pour les température qui nous intéressent, nous pourrions considérer que ceux-ci ne traversent pas d'interface. Ce qui revient à dire que $v_{\perp \mathcal{S}_p} = v_{\perp p}$ et la condition aux bords que nous venons de poser devient obsolète pour les protons dans ce cas.

De manière relativement arbitraire nous pourrions ainsi imposer que la surface délimitée par les protons soit la surface \mathcal{S}_n à travers laquelle passent les neutrons. La condition aux bords pour les neutrons entre le milieu numéroté i contenant les protons et le milieu $i + 1$ devient donc :

$$[n_n v_{\perp n}] = (n_{ni} - n_{n(i+1)})v_{\perp pi} \quad (2.62)$$

Dans le cas général où nous aurons des protons de chaque côté, nous imposerons qu'ils restent confinés chacun dans leur phase. Il en résulte que la condition aux bords pour les protons est la suivante :

$$[v_{\perp p}] = 0 \quad (2.63)$$

Cette condition garantie que les protons ne traversent pas la surface de séparation.

Malheureusement ces conditions aux bords définies par les équations 2.62 et 2.63 autorisant le passage des neutrons d'une phase à l'autre ne sont pas très réalistes. En effet, certainement que des énergies de liaisons des nucléons dans les structures viennent empêcher ce type de passage. D'ailleurs pour qu'un tel phénomène soit possible il faudrait aussi regarder si les neutrons ont le « temps » de se dilater ou de se comprimer pour atteindre la densité du milieu dans lesquels ils viennent d'arriver. C'est en quelque sorte un temps de « thermalisation » qui est définie dans l'ouvrage de Baym et Pethick [13] sous le nom de temps caractéristique de relaxation τ . Ce temps vient remplacer l'intégrale de collision dans les équations de Boltzmann développées dans le cadre de la théorie des liquides de Landau-Fermi. Il représente en quelque sorte la durée de vie d'une quasi-particule associée à une excitation du milieu. Nous pourrions trouver sa formulation explicite dans cet ouvrage [13] qui s'écrit :

$$\tau = \frac{8\pi^4 \hbar^6}{m_*^3 \langle W \rangle (k_B T)^2} \quad (2.64)$$

où $\langle W \rangle$ définit la moyenne du taux de collisions. Afin de pouvoir obtenir des ordres de grandeurs, il est habituel de simplifier cette expression sous la forme suivante :

$$\tau \approx \left(\frac{T_F}{T} \right)^2 \tau_{inter} \quad (2.65)$$

où τ_{inter} représente un temps caractéristique d'interaction, qui pour l'interaction nucléaire vaut typiquement $\tau_{nucl} = 10^{-23}$ s. La température de Fermi se définit quant à elle par :

$$T_F = \frac{p_F^2}{2m_*k_B} \quad (2.66)$$

Pour que les neutrons puissent « thermaliser » et donc passer de part et d'autre des phases il faut que le produit $\omega\tau$ soit inférieur à un.

Pour des densités supérieures à 0.001 fm^{-3} , correspondant à la phase « pasta », et une masse effective $m_* \approx m$ nous avons $T_F \gtrsim 2.3 \cdot 10^{10}$ K. D'autre part nous supposons que la fréquence du mode principalement excité est $\omega \approx k_B T / \hbar$ et elle servira de fréquence de référence pour cette étude de « thermalisation ». Ainsi après avoir défini ces quelques quantités pour les phases « pasta », l'équation 2.65 nous indique qu'il faut $T \gtrsim 5 \cdot 10^9$ K pour avoir $\omega\tau < 1$. Or nous avons supposé auparavant dans la section 1.4 que notre modèle d'excitations collectives serait valable que pour des températures inférieures à $5 \cdot 10^9$ K. Nous en concluons donc que les fluides sont non miscibles et que rien ne traverse les interfaces.

Une telle hypothèse implique que la surface de séparation est maintenue à tout instant. C'est-à-dire que nous avons continuité à tout instant du déplacement de la surface de part et d'autre de celle-ci. Cette assertion pourrait sembler triviale mais elle veut dire simplement qu'aucun trou n'apparaît entre les phases. La dérivation par rapport au temps du déplacement de cette surface, engendré par une perturbation, nous donne la composante perpendiculaire de la vitesse des fluides de part et d'autre de la surface. Comme le déplacement est continu à tout instant, nous trouvons que les composantes perpendiculaires des vitesses sont continues aussi. Cette condition aux bords s'exprime donc de la manière suivante :

$$[v_{\perp a}] = 0 \quad (2.67)$$

Nous venons de définir quelques conditions aux bords sur des vitesses ou des courants de particules. Nous les avons classés dans la catégorie des conditions de type cinématiques puisque nous n'avons fait qu'étudier les mouvement des fluides indépendamment des causes qui pouvaient les provoquer. Parmi celles que nous venons de définir, certaines sont compatibles entre elles, telle que celle donnée par l'équation 2.67 avec celle dans l'équation 2.60. Mais par contre l'équation 2.62

n'est pas compatible avec l'équation 2.67. De toute façon dans la mesure où nous avons besoin de quatre conditions aux bords nous allons essayer d'en déterminer d'autres. Cette fois nous raisonnerons sur les causes du mouvement des fluides, c'est pour cette raison que nous les avons dénommées de types dynamiques.

Conditions de types dynamiques :

La condition au bord habituellement utilisée dans les problèmes de propagation d'ondes sonores s'applique à la pression [62, 69, 97, 19, 36]. En effet, en reprenant l'équation d'Euler pour des fluides classiques nous voyons que la continuité de la pression entraîne la conservation du flux total d'impulsion à travers la surface de séparation. Elle correspond aussi à l'égalisation des forces par unité de surface qui s'exercent de part et d'autre de l'interface. Nous formulerons cette condition de la manière suivante :

$$[P] = 0 \quad (2.68)$$

La pression pour un fluide à l'équilibre hydrostatique est déterminée selon l'identité thermodynamique à température nulle suivante :

$$dP = \sum_{a=n,p} n_a d\mu^a \quad (2.69)$$

Dans le cas précis de superfluides composés d'un mélange d'héliums ^3He - ^4He quelques articles ont repris cette condition aux bords [83, 104, 60]. Notre problème est tout à fait similaire puisqu'à la place d'un mélange d'héliums superfluides nous avons un mélange de neutrons et de protons superfluides. Sans évoquer la superfluidité, Lattimer et ses collaborateurs sont arrivés à des conclusions similaires sur la continuité de la perturbation en pression dans le cadre d'une étude de propriétés des structures en plaques (Cf. appendice B de l'article [65]). Nous pourrions utiliser aussi cette condition aux bords pour notre problème. Mais ces mêmes articles [83, 104, 60] nous ont mis sur la voie pour trouver d'autres conditions aux bords possibles.

En effet, pour que leur système d'équations ait assez de conditions aux bords, ils définissent aussi une condition sur les potentiels chimiques.

Nous allons illustrer notre démarche pour obtenir cette condition aux bords en introduisant une expérience bien connue pour des superfluides et décrite dans le Landau et Lifchitz [62]. Elle consistait à relier deux récipients contenant de l'hélium ^4He superfluide par un capillaire. Chaque récipient contenait de l'hélium dans des conditions thermodynamiques différentes, notamment en températures. Le modèle du vase communiquant nous dit que l'équilibre entre les deux cuves se

fait lorsque la pression aux extrémités du tuyaux de communications sont égales. Comme seule la partie superfluide ne peut traverser le capillaire, l'expérience a montré ici un effet surprenant. Car l'équilibre s'est fait entre les deux récipients en égalisant les potentiels chimiques, même si les pressions étaient différentes. Cette expérience nous montre le rôle essentiel joué par le potentiel chimique pour les superfluides. Usuellement nous les utilisons pour des réactions chimiques, mais en réalité il peuvent être source de mouvement aussi. Un écart de potentiel chimique dans un fluide pourra entraîner un mouvement jusqu'à ce qu'il s'égalise.

L'équation d'Euler classique fait intervenir un gradient de pression et c'est cette quantité qui reste continue aux interfaces habituellement. Et en ce qui nous concerne, nous pourrions réécrire ce gradient de la manière suivante en utilisant l'identité thermodynamique classique :

$$\nabla P = s \nabla T + n \nabla \mu \quad (2.70)$$

Car n'oublions pas que nous nous sommes placés dans l'approximation hydrodynamique à température nulle (Cf section 1.4). Cette hypothèse fait donc disparaître le gradient de température dans les équations laissant uniquement les gradients de potentiels chimiques. Ainsi nos équations 1.130 et 1.131 ne font intervenir ni de pression, ni de fluide normale, ni de température évidemment.

Ce choix se justifie d'autant plus que pour les superfluides, les densités des fluides peuvent être éliminées des équations 1.131 laissant le gradient du potentiel chimique sans facteur multiplicatif. Nous retrouvons là une propriété bien particulière des superfluides puisque l'équation dynamique les régissant correspond en fait à l'équation dynamique pour une particule (Cf. par exemple equation 1.11). L'ensemble des particules superfluides ont le comportement d'une particule dans le même état. Il suffit de multiplier par la densité chaque quantité dans les équations 1.131 pour retrouver les quantités hydrodynamiques habituelles. Le gradient du potentiel chimique, qui intervient dans notre cas, exprime ainsi une force qui s'exerce sur une particule. La densité de force qui s'exerce sur le fluide se retrouve en multipliant ce gradient par la densité du fluide associé.

Si nous reprenons la démarche habituelle pour définir des conditions aux bords, il faut que les champs de contraintes soient continues [97]. Cette assertion se traduit plus précisément par la continuité des quantités qui interviennent dans les gradients. Ainsi les champs de contraintes qui s'exercent sur les superfluides à température nulle sont des gradients de potentiels chimiques. Ce raisonnement nous conduit donc à définir une condition aux bords sur les potentiels chimiques plutôt que sur la pression. Nous la formulons ainsi :

$$[\mu^a] = 0 \quad (2.71)$$

Cette condition aux bords revient ici à conserver aux interfaces l'impulsion par particule \mathbf{p}^a et non la densité d'impulsion.

Dans le cadre de notre étude, nous prendrons en compte ces deux conditions aux bords dynamiques. Chaque perturbation en pression ou en potentiel chimique sera continue aux interfaces selon notre choix et entraînera un déplacement infinitésimal des surfaces de séparations.

2.3.5 Récapitulatif des jeux de conditions aux bords

Après avoir discuté des différentes conditions aux bords physiquement acceptables, nous allons ici proposer plusieurs jeux de quatre conditions aux bords cohérentes que nous utiliserons par la suite pour la résolution numérique des équations. Ces divers choix possibles nous permettront de tenter d'apprécier l'influence sur les excitations collectives de chaque phénomène physique associé à une condition.

1. Le premier jeu que nous proposons est celui qui satisfait le mieux notre intuition et que nous retrouvons communément dans la littérature sur ce sujet. Notamment ces conditions satisfont celles imposées dans les articles mentionné précédemment [83, 104, 60].

$$\mathbf{1} \quad \begin{cases} v_{\perp ni}(t, \mathbf{r}) &= v_{\perp pi}(t, \mathbf{r}) & \text{pour } \mathbf{r} \in \mathcal{S} \\ [v_{\perp a}] &= 0 \\ [P] &= 0 \end{cases} \quad (2.72)$$

Regardons ici en quoi ces conditions aux bords donnent des résultats tout à fait raisonnables lorsqu'on les applique à des excitations monopolaires et dipolaires géantes de noyaux isolés. Nous nous intéresserons en particulier au cas de la matière symétrique, c'est-à-dire que nous aurons autant de protons que de neutrons ($N = Z = A/2$). Dans notre approche hydrodynamique ces noyaux sont des sphère homogènes dont les surfaces sont délimitées nettement avec un rayon R . Dans la mesure où notre interaction de référence sera celle de type RMF dénommée DDH δ [6], nous nous placerons à la densité de saturation nucléaire lui correspondant, soit $n_0 = 0.153 \text{ fm}^{-3}$ et nous aurons $n_p = n_n = n_0/2$.

Tout d'abord, regardons le mode iso-scalaire monopolaire où les neutrons et les protons oscillent ensemble radialement. La solution de l'équation d'onde à l'intérieur des noyaux satisfait la relation suivante :

$$\delta\mu_n = \delta\mu_n \propto j_0(\omega r/u_+) \quad (2.73)$$

où j_l représente les fonctions de Bessel sphériques et $u_+ = 0.169 \text{ c}$ définie la vitesse du son pour une oscillation de neutrons et protons en phases, c'est-à-dire mouvant ensembles dans le même sens. Comme ces particules ont la même vitesse, les conditions aux bords sur les vitesses du jeu 1 sont

automatiquement vérifiées. Par contre la condition sur la pression nécessite d'avoir :

$$\delta\mu_a(r = R) = 0 \quad (2.74)$$

Ainsi d'après 2.73 et en sachant que $j_0(x) = \sin(x)/x$ nous trouvons que l'énergie du mode monopolaire associé est $\hbar\omega = \pi\hbar u_+/R \approx 90 \text{ MeV}/A^{1/3}$.

Concernant le mode isovectoriel dipolaire géant, appelé *Giant-dipole Resonance* (GDR), les neutrons et les protons se déplacent maintenant en sens opposé dans une direction donnée, par exemple z . Notre approche ici est similaire à celle du modèle de Steinwedel-Jensen pour les GDR [94]. De la même manière nous trouvons que la solution de l'équation d'onde dans le noyau satisfait cette fois-ci la relation suivante :

$$\delta\mu_n = -\delta\mu_p \propto j_1(\omega r/u_-) \cos(\theta) \quad (2.75)$$

où θ représente l'angle entre le vecteur position \mathbf{r} et l'axe z . Dans ce cas nous avons la vitesse du son associée au mouvement en opposition de phase des particules qui est pour notre interaction $u_- = 0.233 \text{ c}$. Ce mouvement des particules nous permet de voir que la condition sur la pression, où $\delta P = n_n \delta\mu^n + n_p \delta\mu^p$, est satisfaite automatiquement. Mais ce sont les conditions sur les vitesses qui vont devenir intéressantes ici, puisqu'en utilisant l'équation 1.131 qui dans ce cas s'écrit :

$$\partial_t \mathbf{p}^a = -\nabla \delta\mu^a \quad (2.76)$$

nous trouvons que le champ radial de vitesse est proportionnel à

$$v_{rn} = -v_{rp} \propto \frac{\partial \delta\mu}{\partial r} \propto j_1'(\omega r/u_-) \cos(\theta) \quad (2.77)$$

Ainsi, connaissant la valeur qui annule la fonction j_1' , les conditions sur les vitesses, qui doivent être nulles en $r = R$, nous donnent la relation $\hbar\omega = 2.08\hbar u_-/R \approx 82 \text{ MeV}/A^{1/3}$.

Ces deux résultats pour des excitations de type monopolaire et isovectoriel GDR sont relativement satisfaisant, notamment pour les noyaux lourds, bien que les énergies mises en jeu soient plus grandes que le gap d'énergie qui caractérise la limite de validité de notre modèle. Ainsi, à strictement parler, nous ne devrions pas utiliser une approche hydrodynamique pour ce type d'excitation. Mais si ces résultats sont convenables malgré tout, c'est que pour ces résonances particulières, les déformations de la surface de Fermi n'entrent pas en compte ici, de ce fait l'hydrodynamique continue de bien fonctionner même si nous sommes en absence d'appariement. Ce petit exemple vient nous montrer qu'il existe des cas où même en dehors

des limites de validité des équations hydrodynamique l'approche donne des résultats convenables. Ce qui nous conforte dans l'utilisation de l'hydrodynamique pour notre modèle d'excitations collectives dans la croûte interne des étoiles à neutrons.

2. Ce deuxième jeu de conditions reste pour le moins peu classique, mais rien ne nous empêche de l'utiliser dans la mesure où il pourrait donner des résultats satisfaisant. Ces conditions sur les potentiels chimiques rendent la perturbation en pression discontinue à l'interface mais la pression à l'équilibre reste par contre continue. Ainsi cette discontinuité n'intervient que pour de petits écarts par rapport à l'équilibre n'affectant en aucun cas les propriétés dynamiques globales du système.

$$\mathbf{2} \quad \begin{cases} [v_{\perp a}] &= 0 \\ [\mu^a] &= 0 \end{cases} \quad (2.78)$$

3. Ce troisième jeu de conditions est tout à fait similaire au précédent mais il a l'avantage de ne définir qu'une seule surface de séparation. Nous avons éliminé la condition sur le potentiel chimique des protons dans la mesure où nous aurons affaire à des protons confinés dans une des deux phases.

$$\mathbf{3} \quad \begin{cases} v_{\perp ni}(t, \mathbf{r}) &= v_{\perp pi}(t, \mathbf{r}) & \text{pour } \mathbf{r} \in \mathcal{S} \\ [v_{\perp a}] &= 0 \\ [\mu^n] &= 0 \end{cases} \quad (2.79)$$

4. Et enfin nous terminerons par celles qui sont le moins réalistes mais qui serviront de comparaison, nous laisserons donc passer les neutrons d'une phase à l'autre.

$$\mathbf{4} \quad \begin{cases} [n_n v_{\perp n}] &= (n_{ni} - n_{n(i+1)})v_{\perp pi} \\ [v_{\perp p}] &= 0 \\ [\mu^a] &= 0 \end{cases} \quad (2.80)$$

En résumé chacune de ces conditions aux bords est le reflet de limites créées par certaines hypothèses simplificatrices. Celles-ci sont essentiellement, à mon sens, le défaut d'épaisseur de peau, qui implique des discontinuités dans les densités, l'absence d'effets microscopiques plus complexes tels que des effets dissipatifs ou des effets de tension de surface, l'approximation de température nulle qui rend les fluides « parfaits » et l'absence d'interaction électromagnétique.

Ceci dit, nous aurons tendance à dire que la condition de continuité de la pression est plus représentative de phénomènes collectifs, faisant intervenir en quelque

sorte des moyennes sur un ensemble de particules. Cette condition, comme nous l'avons dit, entraîne la conservation de la densité totale d'impulsion. Nous pourrions faire le rapprochement avec les collisions élastiques entre deux particules de masse différentes. La particule peu massive, associée pour nous au gaz de neutrons peu dense, accélérerait davantage que la particule plus massive, associée à la phase dense de matière nucléaire, lors d'un transfert d'impulsion d'une particule à l'autre pendant la collision. Cette condition est représentative, d'une certaine façon, du mouvement de chaque phase, plus ou moins dense, de manière dissociée.

Alors que la condition sur les potentiels chimiques est plus spécifique d'un phénomène individuel des particules qui restent malgré tout cohérente entre elles de part et d'autre des interfaces. Ainsi la force, i.e. le gradient du potentiel chimique, est source d'une accélération de chaque particule qui reste identique de chaque côté de l'interface. Les déplacements qui en résulte de chaque côté sont tels qu'aucun trou n'apparaît à l'interface, laissant satisfaites les conditions cinématiques établies précédemment.

Cette discussion n'est en fait que le reflet des difficultés que rencontre tout scientifique qui se retrouve à devoir jongler entre prédiction espérée et surprise expérimentale. Il est clair qu'un scientifique doit être capable de faire des modèles prédisant des résultats qui sont observés « expérimentalement ». J'entends par expérience tout système physique réel, même si ce sont des objets astrophysiques. Mais un scientifique doit aussi chercher à observer ce que les modèles ne sont pas capable de prédire. Afin de faire évoluer son modèle, et ainsi faire avancer la science. Mais pour réussir cet exercice de l'esprit il faut réussir à dépasser ce que nos habitudes nous empêchent de percevoir et laisser part à notre imagination, tel un aveugle de naissance qui essaierait d'imaginer la couleur bleue.

Ici nous aimerions bien prendre les conditions aux bords sur la pression, qui sont bien établies dans la littératures, afin d'asseoir fermement notre conception du modèle. Mais n'est-ce pas en prenant des conditions aux bords peu intuitives et aux résultats pas forcément attendus que la science pourrait potentiellement évoluer ?

Bien sûr ce seront des observations « expérimentales » suffisamment précises qui départageront les bonnes des mauvaises conditions aux bords.

C'est donc dans cet esprit qu'il me semble important d'aborder le plus grand nombre de conditions aux bords réalistes pour garder en vue cette démarche scientifique d'ouverture plus que dans l'intention d'obtenir un jour une discrimination expérimentale.

2.4 Modes hydrodynamiques dans les « lasagnes »

Nous nous intéresserons premièrement au problème de la propagation de modes hydrodynamiques, ou ondes sonores, dans les « lasagnes » pour la beauté du problème en soi mais aussi pour pouvoir mieux comprendre et interpréter les résultats que nous obtiendrons. Ensuite nous caractériserons théoriquement les excitations collectives dans les « lasagnes » grâce à une relation de dispersion que nous établirons.

2.4.1 Propagation des modes hydrodynamiques dans les « lasagnes »

Tout d'abord, comme pour l'essentiel de la suite de ce projet, nous n'aborderons le problème que dans le cas de structures à géométries planes pour des raisons de simplicité. Nous pourrions les définir localement comme une alternance périodique de plaques homogènes de densités différentes comme indiqué sur le schéma figure 2.9. Sur cette figure sont représentées deux plaques aux densités et tailles différentes

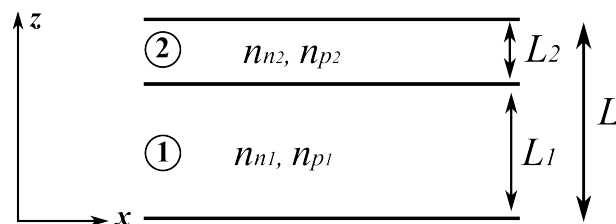


FIG. 2.9: Schématisation des structures planes

qui se reproduisent périodiquement. Nous numérotions chacune de ces plaques en commençant par le bas et nous étiquetterons chaque quantité prise dans une plaque par le numéro lui correspondant. L'orientation de l'axe z perpendiculaire aux plaques sera celle adoptée pour tout le reste de cette étude. Enfin comme nous l'avons choisi, nous garderons en générale la présence de protons dans toutes les phases. Mais en particulier quand nous préciserons que certaines phases sont vides de protons, nous choisirons de les définir avec les numéros impaires.

Avant de poser les équations complètes décrivant notre modèle de propagation d'ondes dans les « lasagnes », il nous reste encore quelques précisions à faire.

Nous allons, en premier, établir l'expression générale décrivant une perturbation. Celle-ci correspond à une somme d'ondes planes associées aux modes \pm qui se propagent dans deux sens opposés pour tenir compte des réflexions. Enfin nous choisirons d'exprimer l'ensemble du problème en prenant comme variable de base

le potentiel chimique et nous relierons l'ensemble des autres perturbations en densités, pression, vitesses au potentiel chimique. Ainsi toute perturbation dans chacune des plaques pourra se formuler comme la superposition d'ondes planes pouvant se réfléchir au interfaces de la manière suivante :

$$\delta\mu^a(t, \mathbf{r}) = \sum_{\sigma=\pm} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}_{\parallel}^{\sigma} \cdot \mathbf{r}_{\parallel}} (\alpha^{\sigma} e^{ik_z^{\sigma} z} + \beta^{\sigma} e^{-ik_z^{\sigma} z}) U_{\sigma}^a \quad (2.81)$$

où U_{\pm}^a sont les vecteurs propres normalisés définis par l'équation 2.12 et $\mathbf{r}_{\parallel} = (x, y, 0)$ représente la position parallèle aux plaques. Les coefficients α^{σ} et β^{σ} représentent les amplitudes affectées à chaque onde qui peuvent être imaginaires. Notons que cette expression est valable dans chaque plaque, ainsi nous aurons $\delta\mu_1^a(t, \mathbf{r})$ pour $0 < z < L_1$, $\delta\mu_2^a(t, \mathbf{r})$ pour $L_1 < z < L$ et $\delta\mu_3^a(t, \mathbf{r})$ pour $L < z < L + L_1$. En raison de la périodicité du milieu, nous pourrions penser que les coefficients $(\alpha^{\pm}, \beta^{\pm})$ sont égaux dans les phases numérotés 1 et 3. Mais bien que nous n'ayons pas défini de processus dissipatifs qui pourraient atténuer les ondes de phase en phase, ces coefficients seront en général différents entre deux milieux séparés d'une période spatiale L .

À l'aide de l'équation 2.8 il nous est possible d'exprimer les champs de vitesse des fluides dans le cas d'une onde plane de vecteur d'onde \mathbf{k} :

$$\mathbf{v}_a = \frac{\mathbf{k}}{n_a \omega} \sum_{b=n,p} (K^{-1})_{ab} \delta\mu^b \quad (2.82)$$

Comme nous aurons besoin par la suite, avec les conditions aux bords, de la projection de cette vitesse sur l'axe z nous allons en donner sa forme explicite ici. Pour cela nous définirons la quantité homogène à une vitesse suivante :

$$V_a^{\pm} = \frac{k_z^{\pm}}{n_a \omega} \sum_{b=n,p} (K^{-1})_{ab} U_{\pm}^b \quad (2.83)$$

Ainsi la composante selon z de ces vitesses s'écrit en particulier :

$$v_{za} = \sum_{\sigma=\pm} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}_{\parallel}^{\sigma} \cdot \mathbf{r}_{\parallel}} (\alpha^{\sigma} e^{ik_z^{\sigma} z} - \beta^{\sigma} e^{-ik_z^{\sigma} z}) V_a^{\sigma} \quad (2.84)$$

Et dans le cas particulier du confinement des protons dans une couche sur deux, nous définirons :

$$V_{n1} = \frac{k_{z1}}{\omega} \frac{U^{n1}}{m^n} \quad (2.85)$$

Nous avons maintenant tous les éléments nécessaires pour caractériser les conditions aux bords établies précédemment dans la section 2.3. Nous remarquerons que nous avons établi les conditions aux bords de telle manière qu'elles ne prennent en

compte que des quantités qui sont égales, voire nulles, de part et d'autre des interfaces à l'équilibre. Ainsi nous pourrions enlever ces quantités prises à l'équilibre dans les égalités qui interviennent aux bords, de telle sorte que nous en déduirions donc des équations uniquement pour les quantités perturbées. Enfin pour le jeu de conditions numéro 4 nous ne retiendrons que les développements au premier ordre comme énoncé dès le début de ce chapitre.

Sans expliciter plus ici ces conditions aux bords nous pouvons remarquer qu'elles ne dépendent aucunement de la position sur l'interface. Dans le cas des « lasagnes », le milieu est invariant par translation selon n'importe quelle direction parallèle aux plaques. Ainsi, pour satisfaire cette indépendance à la position $\mathbf{r}_{||}$, des conditions aux bords nous devons avoir l'égalité des vecteurs d'ondes projetés parallèlement aux plaques. Cette propriété s'exprime pour les trois premières plaques consécutives de la manière suivante :

$$\mathbf{k}_{||1}^{\pm} = \mathbf{k}_{||2}^{\pm} = \mathbf{k}_{||3}^{\pm} \equiv \mathbf{q}_{||} \quad (2.86)$$

où $\mathbf{q}_{||}$ est un paramètre libre qui caractérise les angles de propagations des ondes par rapport aux interfaces planes. De cette manière les quantités physique qui doivent être égales de part et d'autres de l'interface, le restent quelque soit la position $\mathbf{r}_{||}$.

Cette propriété fondamentale des ondes se propageant dans les milieux invariants pas translation est indépendante du choix des conditions aux bords et du type d'ondes considérées. Elle nous permet de retrouver la fameuse loi de Snell-Descartes pour la réfraction. De cette façon si nous définissons l'angle, θ , de propagation dans une couche par

$$|\mathbf{k}_{||}| = |\mathbf{k}| \sin \theta \quad (2.87)$$

nous pouvons relier l'angle de l'onde réfractée à celui de l'onde incidente par la relation définie dans l'équation 2.86. En effet, comme $|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{u}$, nous aurons :

$$\frac{\omega}{u_1} \sin \theta_1 = \frac{\omega}{u_2} \sin \theta_2 \quad (2.88)$$

Si nous prenons c comme vitesse de référence, nous pouvons définir un indice de réfraction sans dimensions n de la manière suivante :

$$n = \frac{c}{u} \quad (2.89)$$

Et nous obtenons à partir de cet indice la formulation classique de la loi de réfraction :

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (2.90)$$

Dans notre étude nous prendrons comme paramètre caractérisant l'orientation de la propagation des modes hydrodynamiques la composante \mathbf{q}_{\parallel} du vecteur d'onde parallèle aux interfaces. Cette quantité représentant une valeur d'entrée dans notre modèle, elle permettra de définir la composante perpendiculaire des vecteurs d'ondes dans chaque plaque comme ceci :

$$k_z^{\pm 2} = \frac{\omega^2}{u^{\pm 2}} - q_{\parallel}^2 \quad (2.91)$$

Cette composante variant d'une phase à l'autre. Nous pourrions remarquer que cette définition nous permet d'établir la notion d'angle limite de réfraction. En effet selon la valeur de q_{\parallel}^2 il se peut que $k_z^{\pm 2}$ soit négatif. Habituellement lorsque $k_z^{\pm 2} \leq 0$ nous sommes en présence de réflexion totale de l'onde et rien n'est transmis à l'autre milieu. Mais dans le cas bien particulier des milieux de tailles finies et n'admettant pas d'effet dissipatifs d'absorption, il est possible que la réflexion totale n'ait plus lieu et nous avons affaire dans ce cas à des ondes qui pénètrent dans le milieu [19, 105, 92, 72]. De telles ondes sont appelées évanescentes en raison de leurs vecteurs d'ondes complexes. Ainsi dans le milieu où l'onde est évanescente, l'argument de l'exponentielle décrivant les variations spatiales de l'onde est réel, la faisant s'atténuer en pénétrant dans le milieu. Ce phénomène est tout à fait similaire à l'effet tunnel pour des particules traversant des barrières de potentiels en mécanique quantique. Il peut donner naissance à des ondes supraluminales, c'est-à-dire qui se propagent plus vite que la lumière en apparence, connu sous le nom d'effet Hartmann [105, 92, 72]. En particulier les milieux périodiques sont plutôt favorables à l'apparition d'ondes supraluminales. Des expériences, d'optiques notamment, ont observé cet effet et sont longtemps restées des étrangetés de la nature mal expliquées [105, 92, 72]. Mais finalement il a été montré que le principe de causalité n'était nullement brisé, aucune particule (protons, neutrons, photons,...) et aucune « information » n'est transportée au-delà de sa vitesse limite, les particules considérées sont virtuelles [105, 92, 72].

En ce qui nous concerne, étant donné que nous aurons des liquides quantiques à température nulle et confinés dans des milieux de tailles finies, nous admettrons la possibilité d'avoir des composantes k_z des vecteurs d'ondes qui sont imaginaires pures. Nous pourrions réécrire la perturbation en potentiel chimique sous la forme :

$$\delta\mu^a(t, \mathbf{r}) = \sum_{\sigma=\pm} e^{-i\omega t + i\mathbf{q}_{\parallel} \cdot \mathbf{r}_{\parallel}} (\alpha^{\sigma} e^{ik_z^{\sigma} z} + \beta^{\sigma} e^{-ik_z^{\sigma} z}) U_{\sigma}^a \quad (2.92)$$

Il nous reste plus qu'à prendre maintenant une onde dans le milieu 1 caractérisée par les amplitudes $(\alpha_1^{\pm}, \beta_1^{\pm})$ et une orientation donnée par \mathbf{q}_{\parallel} et de voir comment elle se propage à travers les plaques grâce aux conditions aux bords.

Afin d'illustrer le plus simplement possible la résolution du problème nous utiliserons tout d'abord le jeu de conditions aux bords numéro 2 donnée dans

l'équation 2.78. car ce jeu de conditions ne nécessite pas d'établir l'expression d'autres quantités physiques. Le problème étant très similaire pour chaque jeu de conditions aux bords, nous déduirons la résolution du problème de ce premier cas étudié.

Conditions aux bords 2 :

Sur la surface $z = L_1$, définissant l'interface entre le milieu 1 et 2, les conditions aux bords equation 2.78 s'écrivent en particulier :

$$\delta\mu_1^a(t, \mathbf{r}, t) = \delta\mu_2^a(t, \mathbf{r}) \quad \text{en } z = L_1 \quad (2.93)$$

et

$$\delta v_{za1}(t, \mathbf{r}) = \delta v_{za2}(t, \mathbf{r}) \quad \text{en } z = L_1 \quad (2.94)$$

Nous réécrivons l'équation 2.93 en utilisant la formule explicite de la perturbation en potentiel chimique 2.81 de la manière suivante :

$$\sum_{\sigma=\pm} (\alpha_1^\sigma e^{ik_{z1}^\sigma L_1} + \beta_1^\sigma e^{-ik_{z1}^\sigma L_1}) U_\sigma^{a1} = \sum_{\sigma=\pm} (\alpha_2^\sigma e^{ik_{z2}^\sigma L_1} + \beta_2^\sigma e^{-ik_{z2}^\sigma L_1}) U_\sigma^{a2} \quad (2.95)$$

Dans cette expression nous avons préalablement éliminé les termes égaux de part et d'autre de l'équation, tels que $e^{-i\omega t}$ et $e^{i\mathbf{k}_{||} \cdot \mathbf{r}_{||}}$.

De la même manière nous reformulons l'équation 2.94 à l'aide de l'équation 2.84 comme suit :

$$\sum_{\sigma=\pm} (\alpha_1^\sigma e^{ik_{z1}^\sigma L_1} - \beta_1^\sigma e^{-ik_{z1}^\sigma L_1}) V_{a1}^\sigma = \sum_{\sigma=\pm} (\alpha_2^\sigma e^{ik_{z2}^\sigma L_1} - \beta_2^\sigma e^{-ik_{z2}^\sigma L_1}) V_{a2}^\sigma \quad (2.96)$$

L'étude de la propagation des ondes de la plaque 1 à la plaque 2 consiste à exprimer les coefficients de réflexion et de transmission au milieu 2. C'est-à-dire que nous déterminons les coefficients $(\alpha_2^\pm, \beta_2^\pm)$ en fonction de $(\alpha_1^\pm, \beta_1^\pm)$ pour une orientation fixée par $\mathbf{q}_{||}$. Le choix de la linéarisation des équations au départ nous permet maintenant d'obtenir des équations linéaires liant les divers coefficients (α^\pm, β^\pm) entre eux. Une manière plus synthétique et relativement visuelle d'écrire ces équations consiste à les mettre sous forme matricielle. Ainsi le vecteur formé par les coefficients d'amplitudes (α^\pm, β^\pm) dans le milieu 1 est relié à celui formé

par les coefficients d'amplitudes dans le milieux 2 de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} U_+^{n1} e^{ik_{z1}^+ L_1} & U_-^{n1} e^{ik_{z1}^- L_1} & U_+^{n1} e^{-ik_{z1}^+ L_1} & U_-^{n1} e^{-ik_{z1}^- L_1} \\ U_+^{p1} e^{ik_{z1}^+ L_1} & U_-^{p1} e^{ik_{z1}^- L_1} & U_+^{p1} e^{-ik_{z1}^+ L_1} & U_-^{p1} e^{-ik_{z1}^- L_1} \\ V_{n1}^+ e^{ik_{z1}^+ L_1} & V_{n1}^- e^{ik_{z1}^- L_1} & -V_{n1}^+ e^{-ik_{z1}^+ L_1} & -V_{n1}^- e^{-ik_{z1}^- L_1} \\ V_{p1}^+ e^{ik_{z1}^+ L_1} & V_{p1}^- e^{ik_{z1}^- L_1} & -V_{p1}^+ e^{-ik_{z1}^+ L_1} & -V_{p1}^- e^{-ik_{z1}^- L_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^+ \\ \alpha_1^- \\ \beta_1^+ \\ \beta_1^- \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} U_+^{n2} e^{ik_{z2}^+ L_1} & U_-^{n2} e^{ik_{z2}^- L_1} & U_+^{n2} e^{-ik_{z2}^+ L_1} & U_-^{n2} e^{-ik_{z2}^- L_1} \\ U_+^{p2} e^{ik_{z2}^+ L_1} & U_-^{p2} e^{ik_{z2}^- L_1} & U_+^{p2} e^{-ik_{z2}^+ L_1} & U_-^{p2} e^{-ik_{z2}^- L_1} \\ V_{n2}^+ e^{ik_{z2}^+ L_1} & V_{n2}^- e^{ik_{z2}^- L_1} & -V_{n2}^+ e^{-ik_{z2}^+ L_1} & -V_{n2}^- e^{-ik_{z2}^- L_1} \\ V_{p2}^+ e^{ik_{z2}^+ L_1} & V_{p2}^- e^{ik_{z2}^- L_1} & -V_{p2}^+ e^{-ik_{z2}^+ L_1} & -V_{p2}^- e^{-ik_{z2}^- L_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2^+ \\ \alpha_2^- \\ \beta_2^+ \\ \beta_2^- \end{pmatrix} \quad (2.97)
\end{aligned}$$

Cette formulation peut paraître plus compliquée mais en dénommant $M_1(L_1)$ (resp. $M_2(L_1)$) la matrice dans le milieu 1 (resp. dans le milieux 2) dont les conditions aux bords sont prisent en L_1 . Cette équation s'allège dans son écriture comme suit :

$$M_1(L_1) \begin{pmatrix} \alpha_1^+ \\ \alpha_1^- \\ \beta_1^+ \\ \beta_1^- \end{pmatrix} = M_2(L_1) \begin{pmatrix} \alpha_2^+ \\ \alpha_2^- \\ \beta_2^+ \\ \beta_2^- \end{pmatrix} \quad (2.98)$$

Nous pouvons continuer de synthétiser le problème puisque les matrices $M_1(z)$ et $M_2(z)$, qui sont similaires, s'identifient à une matrice $M(z)$ prise ici à la position $z = L_1$ et dont les coefficients sont calculés dans le milieu correspondant. En particulier cette matrice $M(z)$ s'écrit :

$$M(z) = \begin{pmatrix} U_+^n e^{ik_z^+ z} & U_-^n e^{ik_z^- z} & U_+^n e^{-ik_z^+ z} & U_-^n e^{-ik_z^- z} \\ U_+^p e^{ik_z^+ z} & U_-^p e^{ik_z^- z} & U_+^p e^{-ik_z^+ z} & U_-^p e^{-ik_z^- z} \\ V_n^+ e^{ik_z^+ z} & V_n^- e^{ik_z^- z} & -V_n^+ e^{-ik_z^+ z} & -V_n^- e^{-ik_z^- z} \\ V_p^+ e^{ik_z^+ z} & V_p^- e^{ik_z^- z} & -V_p^+ e^{-ik_z^+ z} & -V_p^- e^{-ik_z^- z} \end{pmatrix} \quad (2.99)$$

Par ailleurs, pour exprimer les coefficients $(\alpha_2^\pm, \beta_2^\pm)$ en fonction de $(\alpha_1^\pm, \beta_1^\pm)$ il faudrait inverser la matrice $M_2(L_1)$, nous le ferons en prenant la matrice $M(z)$. Pour cela nous allons commencer par simplifier cette matrice $M(z)$ pour en déduire facilement son inverse et ainsi vérifier son inversibilité. Tout d'abord, nous séparons la partie liée milieu de la partie ondulatoire exprimée grâce aux exponentielles complexes de cette façon :

$$M(z) = \begin{pmatrix} U_+^n & U_-^n & U_+^n & U_-^n \\ U_+^p & U_-^p & U_+^p & U_-^p \\ V_n^+ & V_n^- & -V_n^+ & -V_n^- \\ V_p^+ & V_p^- & -V_p^+ & -V_p^- \end{pmatrix} \times \text{diag} \left(e^{ik_z^+ z}, e^{ik_z^- z}, e^{-ik_z^+ z}, e^{-ik_z^- z} \right) \quad (2.100)$$

où $diag(e^{ik_z^+z}, e^{ik_z^-z}, e^{-ik_z^+z}, e^{-ik_z^-z})$ définit la matrice 4×4 diagonale dont les éléments diagonaux sont entre parenthèses. Puis pour éviter les répétitions d'éléments identiques, nous pouvons effectuer encore la simplification suivante :

$$M(z) = \begin{pmatrix} U_+^n & U_-^n & 0 & 0 \\ U_+^p & U_-^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_n^+ & V_n^- \\ 0 & 0 & V_p^+ & V_p^- \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times diag(e^{ik_z^+z}, e^{ik_z^-z}, e^{-ik_z^+z}, e^{-ik_z^-z}) \quad (2.101)$$

L'inverse de la matrice $M(z)$ se calcule facilement maintenant en multipliant les matrices inverses comme suit :

$$M^{-1}(z) = diag(e^{-ik_z^+z}, e^{-ik_z^-z}, e^{ik_z^+z}, e^{ik_z^-z}) \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_-^p/U_{det} & -U_-^n/U_{det} & 0 & 0 \\ -U_+^p/U_{det} & U_+^n/U_{det} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_p^-/V_{det} & -V_n^-/V_{det} \\ 0 & 0 & -V_p^+/V_{det} & V_n^+/V_{det} \end{pmatrix} \quad (2.102)$$

où U_{det} et V_{det} désignent les déterminants des matrices formées par les éléments U_{\pm}^a et V_a^{\pm} , c'est-à-dire :

$$U_{det} = U_+^n U_-^p - U_-^n U_+^p \quad (2.103)$$

et

$$V_{det} = V_n^+ V_p^- - V_n^- V_p^+ \quad (2.104)$$

Ainsi nous en déduisons que la matrice $M(z)$ est inversible si et seulement si

$$U_{det} \neq 0 \quad (2.105)$$

et

$$V_{det} \neq 0 \quad (2.106)$$

Or par construction des vecteurs propres U_{\pm}^a nous avons $U_{det} \neq 0$ sauf dans le cas où plus qu'un seul mode n'est autorisé. Ce cas là, ne se produit que dans deux conditions, soit nous avons moins de deux solutions pour l'équation 2.15 donnant les vitesses du son, soit le milieu ne contient qu'un seul composant. Si nous n'avons pas assez de solutions donnant les vitesses du son alors il se pourra qu'il n'y ait pas de propagation de mode hydrodynamiques dans le milieu. La condition où un des milieux ne contient que des neutrons sera abordée par la suite et nous verrons

que la propagation d'onde restera possible car le système se réduit de telle sorte que nous aurons autant d'équations aux bords que d'inconnues.

Pour le cas $V_{det} \neq 0$, si nous nous référons à l'équation 2.83, les conditions sont les mêmes que pour U_{det} sauf si l'une des deux quantités k_z^\pm s'annule. La condition $k_z^\sigma = 0$ implique que le mode hydrodynamique associé est non physique puisqu'en prenant l'équation 2.92 nous trouvons une solution non nulle de la forme $\alpha^\sigma = -\beta^\sigma \neq 0$ avec les autres coefficients nuls mais qui correspond à $\delta\mu^a = 0$, c'est-à-dire que rien de physique ne se passe.

Nous avons résolu maintenant le problème de la propagation des ondes du milieu 1 au milieu 2 puisque nous pouvons exprimer les coefficients $(\alpha_2^\pm, \beta_2^\pm)$ en fonction de $(\alpha_1^\pm, \beta_1^\pm)$ comme le montre l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} \alpha_2^+ \\ \alpha_2^- \\ \beta_2^+ \\ \beta_2^- \end{pmatrix} = M_2^{-1}(L_1) \times M_1(L_1) \begin{pmatrix} \alpha_1^+ \\ \alpha_1^- \\ \beta_1^+ \\ \beta_1^- \end{pmatrix} \quad (2.107)$$

où $M_2^{-1}(L_1)$ est l'inverse de la matrice $M_2(L_1)$, calculé à partir de l'expression $M^{-1}(z)$ donnée par l'équation 2.102.

Le problème de la propagation des ondes aux autres milieux est complètement identique à celui que nous venons de résoudre. La solution s'obtient à partir d'une relation de récurrence qui détermine les coefficients $(\alpha_{N+1}^\pm, \beta_{N+1}^\pm)$ dans le milieu numéroté $N + 1$ en fonction de ceux dans le milieu numéroté N de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{N+1}^+ \\ \alpha_{N+1}^- \\ \beta_{N+1}^+ \\ \beta_{N+1}^- \end{pmatrix} = M_{N+1}^{-1}(Z_N) \times M_N(Z_N) \begin{pmatrix} \alpha_N^+ \\ \alpha_N^- \\ \beta_N^+ \\ \beta_N^- \end{pmatrix} \quad (2.108)$$

où Z_N définit la position de l'interface entre les milieux $N + 1$ et N .

Notons que cette étude a été faite dans le cadre de matière contenant les deux composants neutrons et protons partout. Il faut bien comprendre que ces équations sont intimement liées à cette propriété comme nous allons le voir par la suite. Nous proposons maintenant de résoudre ce même problème mais dans le cas plus concret où les phases numérotées impaires ne contiennent pas de protons.

Avant tout une petite précision s'impose quant à la définition du potentiel chimique des protons ainsi que de ses variations dans les phases où ceux-ci sont absents. Rappelons que le potentiel chimique des protons reste défini même en l'absence des particules qu'il représente. D'ailleurs, sans cela, il n'aurait pas été possible de faire les calculs des structures « pasta » qui imposent, entre autre, l'égalité des potentiels chimiques entre les deux phases. Cette quantité représente dans ce cas l'énergie qu'aurait un proton isolé si on le mettait dans cette phase de

neutrons purs. Par contre, la question se pose réellement, quant aux fluctuations du potentiel chimique causées par une perturbation dans la phase neutronique. En effet en inversant l'équation 2.3 nous pouvons définir la perturbation en potentiel chimique à l'aide des perturbations en densités. Explicitement, cette reformulation s'écrit :

$$\delta\mu^a = \frac{\partial\mu^a}{\partial n_n}\delta n_n + \frac{\partial\mu^a}{\partial n_p}\delta n_p \quad (2.109)$$

Or nous savons que la dérivée partielle, $\frac{\partial\mu^p}{\partial n_p}$, n'est pas définie à densité de protons nulle, elle tend même vers l'infinie à proprement parler. Ceci s'explique par le fait qu'en l'absence de protons, ceux-ci ne « portent » évidemment pas d'énergie, alors que si nous mettons un seul proton dans une matière neutronique, il « portera » une énergie, de masse, d'interaction..., non nulle, qui par définition est égale à son potentiel chimique. C'est cette transition discontinue d'une énergie nulle à une énergie finie qui rend infinie à densité nulle la dérivée partielle du potentiel chimique des protons.

Dans la mesure où nous ne considérerons pas de passage de protons d'une phase à l'autre, nous n'aurons pas de fluctuation du potentiel chimique des protons créée par le changement de densité de protons dans la phase neutronique. Cette fluctuation sera créée uniquement par les perturbations en densité de neutrons dans cette phase. Nous écrivons donc dans ce cas :

$$\delta\mu^p = \frac{\partial\mu^p}{\partial n_n}\delta n_n \quad (2.110)$$

Malgré tout, rien ne nous empêche de choisir un jeu de conditions aux bords ne faisant pas intervenir ce potentiel chimique si une telle définition devait poser problème.

Nous pouvons donc maintenant continuer notre étude entamée dans le cas de phases neutroniques pures. La technique d'approche dans ce cas est assez différente dans le sens où nos matrices ne seront plus carrées. Mais par « chance » nous ne calculerons d'inverse de matrice que celles qui sont carrées. Commençons par écrire explicitement la perturbation en potentiel chimique dans les phases neutroniques où seul un unique mode hydrodynamique n'est autorisé :

$$\delta\mu^a(t, \mathbf{r}) = e^{-i\omega t + i\mathbf{q}_{||} \cdot \mathbf{r}_{||}} (\alpha e^{ik_z z} + \beta e^{-ik_z z}) U^a \quad (2.111)$$

En effet ici seuls les deux coefficients α et β suffisent à caractériser les ondes dans ce milieu. La formulation de la perturbation en potentiel chimique dans les autres phases s'écrit de la même manière que dans l'équation 2.81.

Nous allons trouver dans ces conditions que les critères de propagation des modes à travers les plaques sont assez différents du cas précédent. En effet, les

modes dans le milieu contenant des protons ne sont pas complètement libres, ils devront satisfaire certaines conditions aux deux extrémités des couches à la fois pour pouvoir se propager. Ceci est dû au fait qu'une des conditions aux bords dans le jeu numéro 2 a disparue. Nous ne pouvons plus imposer de continuité des vitesses de protons dans la mesure où l'une des deux phases n'a plus de protons et donc nous ne donnerons aucune contrainte sur cette vitesse. Ainsi nous n'avons plus que trois conditions aux bords en $z = L_1$, or il nous faut déterminer quatre coefficients $(\alpha_2^\pm, \beta_2^\pm)$ pour pouvoir caractériser complètement l'onde dans le milieu 2. Mais comme nous l'avons précisé précédemment, nous nous intéresserons aux excitations de longueur d'onde plus grandes que la cellule de Wigner-Seitz, et donc nous aurons besoin de définir aussi les conditions aux bords valable en $z = L$. Dans ce cas au total nous aurons posé six conditions aux bords qui nous permettront de calculer les quatre coefficients $(\alpha_2^\pm, \beta_2^\pm)$ et les deux coefficients (α_3, β_3) . Et nous aurons ainsi établi la manière dont peuvent se propager ces modes non seulement à travers la plaque numéro 2 mais aussi à travers la plaque numéro 3.

Voici donc les conditions aux bords que nous utiliserons pour la transmission de l'onde du milieu 1 au milieu 2 :

$$\delta v_{zn1}(t, \mathbf{r}) = \delta v_{zn1}(t, \mathbf{r}) \quad \text{en } z = L_1 \quad (2.112)$$

et

$$\delta \mu_1^a(t, \mathbf{r}) = \delta \mu_2^a(t, \mathbf{r}) \quad \text{en } z = L_1, \quad (2.113)$$

$$\delta \mu_2^a(t, \mathbf{r}) = \delta \mu_3^a(t, \mathbf{r}) \quad \text{en } z = L \quad (2.114)$$

Comme il n'y a qu'un seul mode autorisé dans le milieu 3, les perturbations en potentiels chimiques ne se répartissent que sur le seul vecteur (U_3^n, U_3^p) . Ainsi aurons la relation suivante qui est automatiquement vérifiée :

$$\delta \mu_3^n(t, \mathbf{r}) U_3^p - \delta \mu_3^p(t, \mathbf{r}) U_3^n = 0 \quad (2.115)$$

D'après l'équation 2.114 nous pouvons remplacer les potentiels chimiques dans 3 par ceux dans 2 dans l'équation précédente 2.115 à l'interface $z = L$, ce qui nous donne :

$$\delta \mu_2^n(t, \mathbf{r}) U_3^p - \delta \mu_2^p(t, \mathbf{r}) U_3^n = 0 \quad \text{en } z = L \quad (2.116)$$

Ainsi nous avons trouvé une relation indépendante des coefficients (α_3, β_3) et valable en $z = L$.

De la même manière que précédemment, nous pouvons reformuler en termes matriciels les équations linéaires 2.112, 2.113 ainsi que l'équation linéaire 2.116 obtenue avec les conditions aux bords en $z = L$. Nous avons donc :

$$M'_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = M'_2 \begin{pmatrix} \alpha_2^+ \\ \alpha_2^- \\ \beta_2^+ \\ \beta_2^- \end{pmatrix} \quad (2.117)$$

Sauf que maintenant les matrices M'_1 et M'_2 ne sont plus aussi générales que précédemment et M'_1 n'est pas carrée. En particulier M'_1 s'écrit :

$$M'_1 = \begin{pmatrix} U_{n1} e^{ik_{z1}L_1} & U_{n1} e^{-ik_{z1}L_1} \\ U_{p1} e^{ik_{z1}L_1} & U_{p1} e^{-ik_{z1}L_1} \\ V_{n1} e^{ik_{z1}L_1} & -V_{n1} e^{-ik_{z1}L_1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{n1} & U_{n1} \\ U_{p1} & U_{p1} \\ V_{n1} & -V_{n1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{ik_{z1}L_1} & 0 \\ 0 & e^{-ik_{z1}L_1} \end{pmatrix} \quad (2.118)$$

De même la matrice M'_2 s'écrit :

$$M'_2 = \begin{pmatrix} U_+^{n2} e^{ik_{z2}^+L_1} & U_-^{n2} e^{ik_{z2}^-L_1} & U_+^{n2} e^{-ik_{z2}^+L_1} & U_-^{n2} e^{-ik_{z2}^-L_1} \\ U_+^{p2} e^{ik_{z2}^+L_1} & U_-^{p2} e^{ik_{z2}^-L_1} & U_+^{p2} e^{-ik_{z2}^+L_1} & U_-^{p2} e^{-ik_{z2}^-L_1} \\ V_{n2}^+ e^{ik_{z2}^+L_1} & V_{n2}^- e^{ik_{z2}^-L_1} & -V_{n2}^+ e^{-ik_{z2}^+L_1} & -V_{n2}^- e^{-ik_{z2}^-L_1} \\ \Upsilon_+ e^{ik_{z2}^+L} & \Upsilon_- e^{ik_{z2}^-L} & \Upsilon_+ e^{-ik_{z2}^+L} & \Upsilon_- e^{-ik_{z2}^-L} \end{pmatrix} \quad (2.119)$$

avec

$$\Upsilon_+ = U_+^{n2}U^{p3} - U_+^{p2}U^{n3} \quad \text{et} \quad \Upsilon_- = U_-^{n2}U^{p3} - U_-^{p2}U^{n3} \quad (2.120)$$

Nous reconnaitrons dans les lignes un et deux des matrices M'_1 et M'_2 les conditions sur le potentiel chimique en $z = L_1$, dans la ligne trois la condition sur la vitesse des neutrons et dans la ligne quatre la condition aux bords équation 2.116 en $z = L$. Comme nous aurons besoin d'inverser la matrice M'_2 pour obtenir les coefficients $(\alpha_2^\pm, \beta_2^\pm)$, nous allons d'abord la simplifier. La séparation de la partie ondulatoire n'est possible que pour les trois premières lignes, ce qui donne :

$$M'_2 = \begin{pmatrix} U_+^{n2} & U_-^{n2} & U_+^{n2} & U_-^{n2} \\ U_+^{p2} & U_-^{p2} & U_+^{p2} & U_-^{p2} \\ V_{n2}^+ & V_{n2}^- & -V_{n2}^+ & -V_{n2}^- \\ \Upsilon_+ e^{ik_{z2}^+L_2} & \Upsilon_- e^{ik_{z2}^-L_2} & \Upsilon_+ e^{-ik_{z2}^+L_2} & \Upsilon_- e^{-ik_{z2}^-L_2} \end{pmatrix} \times \text{diag} \left(e^{ik_{z2}^+L_1}, e^{ik_{z2}^-L_1}, e^{-ik_{z2}^+L_1}, e^{-ik_{z2}^-L_1} \right) \quad (2.121)$$

Puis toujours pour éviter les répétitions de termes inutiles nous obtenons :

$$M'_2 = \begin{pmatrix} U_+^{n2} & U_-^{n2} & 0 & 0 \\ U_+^{p2} & U_-^{p2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_{n2}^+ & V_{n2}^- \\ \Upsilon_+ \cos(k_{z2}^+L_2) & \Upsilon_- \cos(k_{z2}^-L_2) & i\Upsilon_+ \sin(k_{z2}^+L_2) & i\Upsilon_- \sin(k_{z2}^-L_2) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \text{diag} \left(e^{ik_{z2}^+L_1}, e^{ik_{z2}^-L_1}, e^{-ik_{z2}^+L_1}, e^{-ik_{z2}^-L_1} \right) \quad (2.122)$$

Quelques calculs d'algèbre linéaire nous permettent d'arriver à l'inverse de la matrice M'_2 suivant :

$$\begin{aligned}
M_2'^{-1} &= \text{diag} \left(e^{-ik_{z2}^+ L_1}, e^{-ik_{z2}^- L_1}, e^{+ik_{z2}^+ L_1}, e^{+ik_{z2}^- L_1} \right) \\
&\times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} U_-^{p2}/U_{det2} & -U_-^{n2}/U_{det2} & 0 & 0 \\ -U_+^{p2}/U_{det2} & U_+^{n2}/U_{det2} & 0 & 0 \\ \frac{V_{n2}^- A_p}{U_{det2} A_{V\Upsilon}} & \frac{-V_{n2}^- A_n}{U_{det2} A_{V\Upsilon}} & \frac{i\Upsilon_- \sin(k_{z2}^- L_2)}{A_{V\Upsilon}} & \frac{-V_{n2}^-}{A_{V\Upsilon}} \\ \frac{-V_{n2}^+ A_p}{U_{det2} A_{V\Upsilon}} & \frac{V_{n2}^+ A_n}{U_{det2} A_{V\Upsilon}} & \frac{-i\Upsilon_+ \sin(k_{z2}^+ L_2)}{A_{V\Upsilon}} & \frac{V_{n2}^+}{A_{V\Upsilon}} \end{pmatrix} \quad (2.123)
\end{aligned}$$

avec

$$U_{det2} = U_+^{n2} U_-^{p2} - U_-^{n2} U_+^{p2} \quad (2.124)$$

$$A_{V\Upsilon} = i \left(V_{n2}^+ \Upsilon_- \sin(k_{z2}^- L_2) - V_{n2}^- \Upsilon_+ \sin(k_{z2}^+ L_2) \right) \quad (2.125)$$

$$A_n = U_-^{n2} \Upsilon_+ \cos(k_{z2}^+ L_2) - U_+^{n2} \Upsilon_- \cos(k_{z2}^- L_2) \quad (2.126)$$

$$A_p = U_-^{p2} \Upsilon_+ \cos(k_{z2}^+ L_2) - U_+^{p2} \Upsilon_- \cos(k_{z2}^- L_2) \quad (2.127)$$

La matrice inverse $M_2'^{-1}$ permet ainsi d'exprimer $(\alpha_2^\pm, \beta_2^\pm)$ en fonction de (α_1, β_1) . Nous en déduisons que cette matrice n'est inversible que si :

$$U_{det2} \neq 0 \quad (2.128)$$

et

$$A_{V\Upsilon} \neq 0 \quad (2.129)$$

Autant pour des raisons que nous avons déjà évoqué, nous avons $U_{det2} \neq 0$ sauf dans le cas d'un seul mode autorisé. Autant la relation $A_{V\Upsilon} \neq 0$ ne sera pas automatiquement vérifiée. Elle permettra d'identifier certaines fréquences interdites puisque si nous regardons la forme explicite de $A_{V\Upsilon}$ équation 2.125, nous voyons que par l'intermédiaire de k_{z2}^+ et k_{z2}^- cette relation dépend de la fréquence ω .

La transmission de l'onde du milieu 2 au milieu 3, qui est autorisée par construction de M'_2 , sera déterminée par deux conditions aux bords encore indépendantes. Celles-ci sont :

$$\delta\mu_2^n(t, \mathbf{r}) = \delta\mu_3^n(t, \mathbf{r}) \quad \text{en } z = L, \quad (2.130)$$

et

$$\delta v_{zn2}(t, \mathbf{r}) = \delta v_{zn3}(t, \mathbf{r}) \quad \text{en } z = L \quad (2.131)$$

Ainsi nous pourrons écrire une relation entre les coefficients d'amplitude de la manière suivante :

$$M_2'' \begin{pmatrix} \alpha_2^+ \\ \alpha_2^- \\ \beta_2^+ \\ \beta_2^- \end{pmatrix} = M_3' \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \quad (2.132)$$

où nous avons en particulier

$$M'' = \begin{pmatrix} U_+^{n2} e^{ik_{z2}^+ L} & U_-^{n2} e^{ik_{z2}^- L} & U_+^{n2} e^{-ik_{z2}^+ L} & U_-^{n2} e^{-ik_{z2}^- L} \\ V_{n2}^+ e^{ik_{z2}^+ L} & V_{n2}^- e^{ik_{z2}^- L} & -V_{n2}^+ e^{-ik_{z2}^+ L} & -V_{n2}^- e^{-ik_{z2}^- L} \end{pmatrix} \quad (2.133)$$

et

$$M_3' = \begin{pmatrix} U^{p3} e^{ik_{z3} L} & U^{p3} e^{-ik_{z3} L} \\ V_{n3} e^{ik_{z3} L} & -V_{n3} e^{-ik_{z3} L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^{p3} & U^{p3} \\ V_{n3} & -V_{n3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{ik_{z3} L} & 0 \\ 0 & e^{-ik_{z3} L} \end{pmatrix} \quad (2.134)$$

La périodicité du milieu rendant identique les conditions physiques à l'équilibre dans 1 et dans 3, nous pourrons écrire ainsi :

$$M_3' = \begin{pmatrix} U^{n1} & U^{n1} \\ V_{n1} & -V_{n1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{ik_{z1} L} & 0 \\ 0 & e^{-ik_{z1} L} \end{pmatrix} \quad (2.135)$$

L'inversion de la matrice M_3' est quant à elle triviale et permet d'exprimer (α_3, β_3) en fonction de $(\alpha_2^\pm, \beta_2^\pm)$. La résolution du problème pour la propagation à travers N couches sera similaire à celle que nous venons de faire pour les trois couches successives 1,2,3 mais en remplaçant les positions par celles adéquates dans les matrices M_1' , M_2' , M_2'' et M_3' . Nous ne détaillerons par plus ces calculs ici.

Nous venons de présenter quelques aspect généraux sur la propagations des modes hydrodynamiques à travers les différentes plaques. Pour cela nous avons choisi le jeu de conditions aux bords numéro 2 qui rend le problème plus simple à résoudre. Par la suite nous ne ferons pas cette étude aussi complète et détaillée, nous nous contenterons de donner essentiellement les matrices qui pourrons nous être utiles pour l'interprétation des résultats. En particulier nous nous restreindrons au cas concret qui nous concerne, c'est-à-dire celui où les protons sont confinés dans une des deux couches. Les problèmes étant quasiment les mêmes, nous remplacerons formellement certaines quantités dans les matrices M_1' , M_2' , M_2'' et M_3' par celles induites par les nouvelles conditions aux bords.

Conditions aux bords 1 :

Pour ces conditions aux bords nous aurons besoin de relier la perturbation en pression à celle en potentiel chimique. L'identité thermodynamique que nous avons posé dans l'équation 2.69 nous permet d'écrire :

$$\delta P = \sum_{a=n,p} n_a \delta \mu^a \quad (2.136)$$

De cette équation établissant la perturbation en pression nous aurons besoin de définir les quantités homogènes à une pression suivantes :

$$P_{\pm} = \sum_{a=n,p} n_a U_{\pm}^a \quad (2.137)$$

Cette équation se réduit pour le cas sans protons à :

$$P_1 = n_{n1} U^{n1} \quad (2.138)$$

En raison de l'absence du fluide de protons dans les phases 1 et 3 les conditions aux bords sur les vitesses en $z = L_1$ sont équivalentes à celles-ci :

$$\begin{cases} \delta v_{zn1}(t, \mathbf{r}) = \delta v_{zn2}(t, \mathbf{r}) & \text{en } z = L_1 \\ \delta v_{zn1}(t, \mathbf{r}) = \delta v_{zp2}(t, \mathbf{r}) & \text{en } z = L_1 \end{cases} \quad (2.139)$$

où nous avons égalisé la vitesse des neutrons d'un côté avec la vitesse des protons et neutrons de l'autre côté de la surface de séparation. La troisième condition aux bords utilisée est celle égalisant les perturbation en pression. La quatrième condition que nous utiliserons afin de rendre carrée la matrice M'_2 sera celle définissant une seule interface en égalisant les vitesses des neutrons et des protons dans la phase 2 en $z = L$, equation 2.72, soit :

$$\delta v_{zn2}(t, \mathbf{r}) = \delta v_{zp2}(t, \mathbf{r}) \quad \text{en } z = L \quad (2.140)$$

Pour cela nous définirons ainsi à partir des vitesses V_a^{\pm} , equation 2.83, les différences suivantes :

$$dV_{np}^{\pm} = V_n^{\pm} - V_p^{\pm} \quad (2.141)$$

Le problème étant formellement le même nous remplacerons les quantités dans les matrices M'_1 , M'_2 , M'^{-1}_2 , M''_2 et M'_3 respectivement équations 2.118, 2.122, 2.123, 2.133 et 2.134. Ainsi nous obtenons pour M'_1 :

$$M'_1 = \begin{pmatrix} V_{n1} & -V_{n1} \\ V_{n1} & -V_{n1} \\ P_1 & P_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{ik_{z1}L_1} & 0 \\ 0 & e^{-ik_{z1}L_1} \end{pmatrix} \quad (2.142)$$

La matrice M'_2 est quelque peu différente de la précédente en raison de signes d'expressions qui changent, comme nous pouvons le voir ci-dessous :

$$\begin{aligned}
M'_2 &= \begin{pmatrix} V_{n2}^+ & V_{n2}^- & 0 & 0 \\ V_{p2}^+ & V_{p2}^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{2+} & P_{2-} \\ dV_{np}^+ \cos(k_{z2}^+ L_2) & dV_{np}^- \cos(k_{z2}^- L_2) & -idV_{np}^+ \sin(k_{z2}^+ L_2) & -idV_{np}^- \sin(k_{z2}^- L_2) \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\times \text{diag} \left(e^{ik_{z2}^+ L_1}, e^{ik_{z2}^- L_1}, e^{-ik_{z2}^+ L_1}, e^{-ik_{z2}^- L_1} \right) \quad (2.143)
\end{aligned}$$

Nous avons son inverse qui devient :

$$\begin{aligned}
M_2'^{-1} &= \text{diag} \left(e^{-ik_{z2}^+ L_1}, e^{-ik_{z2}^- L_1}, e^{+ik_{z2}^+ L_1}, e^{+ik_{z2}^- L_1} \right) \\
&\times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} V_{p2}^-/V_{det2} & -V_{n2}^-/V_{det2} & 0 & 0 \\ -V_{p2}^+/V_{det2} & V_{n2}^+/V_{det2} & 0 & 0 \\ \frac{P_{2-} A_p}{V_{det2} A_{PdV}} & \frac{-P_{2-} A_n}{V_{det2} A_{PdV}} & \frac{idV_{np}^- \sin(k_{z2}^- L_2)}{A_{PdV}} & \frac{-P_{2-}}{A_{PdV}} \\ \frac{-P_{2+} A_p}{V_{det2} A_{PdV}} & \frac{P_{2+} A_n}{V_{det2} A_{PdV}} & \frac{-idV_{np}^+ \sin(k_{z2}^+ L_2)}{A_{PdV}} & \frac{P_{2+}}{A_{PdV}} \end{pmatrix} \quad (2.144)
\end{aligned}$$

avec

$$V_{det2} = V_{n2}^+ V_{p2}^- - V_{n2}^- V_{p2}^+ \quad (2.145)$$

$$A_{PdV} = i \left(P_{2+} dV_{np}^- \sin(k_{z2}^- L_2) - P_{2-} dV_{np}^+ \sin(k_{z2}^+ L_2) \right) \quad (2.146)$$

$$A_n = V_{n2}^- dV_{np}^+ \cos(k_{z2}^+ L_2) - V_{n2}^+ dV_{np}^- \cos(k_{z2}^- L_2) \quad (2.147)$$

$$A_p = V_{p2}^- dV_{np}^+ \cos(k_{z2}^+ L_2) - V_{p2}^+ dV_{np}^- \cos(k_{z2}^- L_2) \quad (2.148)$$

Nous en déduisons de même que cette matrice n'est inversible que si

$$V_{det2} \neq 0 \quad (2.149)$$

et

$$A_{PdV} \neq 0 \quad (2.150)$$

Et enfin nous avons les matrices suivantes en prenant $v_{\perp n2}$ comme vitesse de référence à l'interface $z = L$ et la pression :

$$M_2'' = \begin{pmatrix} V_{n2}^+ e^{ik_{z2}^+ L} & V_{n2}^- e^{ik_{z2}^- L} & -V_{n2}^+ e^{-ik_{z2}^+ L} & -V_{n2}^- e^{-ik_{z2}^- L} \\ P_{2+} e^{ik_{z2}^+ L} & P_{2-} e^{ik_{z2}^- L} & P_{2+} e^{-ik_{z2}^+ L} & P_{2-} e^{-ik_{z2}^- L} \end{pmatrix} \quad (2.151)$$

et

$$M_3' = \begin{pmatrix} V_{n3} & -V_{n3} \\ P_1 & P_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{ik_{z3} L} & 0 \\ 0 & e^{-ik_{z3} L} \end{pmatrix} \quad (2.152)$$

Conditions aux bords 3 :

Le problème est identique en tout point à celui pour les conditions aux bords numéro 1, nous aurons juste à remplacer P par μ^n .

Ce qui donne :

$$M_1' = \begin{pmatrix} V_{n1} & -V_{n1} \\ V_{n1} & -V_{n1} \\ U_{n1} & U_{n1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{ik_{z1} L_1} & 0 \\ 0 & e^{-ik_{z1} L_1} \end{pmatrix} \quad (2.153)$$

$$\begin{aligned} M_2' &= \begin{pmatrix} V_{n2}^+ & V_{n2}^- & 0 & 0 \\ V_{p2}^+ & V_{p2}^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_{+}^{n2} & U_{-}^{n2} \\ dV_{np}^+ \cos(k_{z2}^+ L_2) & dV_{np}^- \cos(k_{z2}^- L_2) & -idV_{np}^+ \sin(k_{z2}^+ L_2) & -idV_{np}^- \sin(k_{z2}^- L_2) \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\times \text{diag} \left(e^{ik_{z2}^+ L_1}, e^{ik_{z2}^- L_1}, e^{-ik_{z2}^+ L_1}, e^{-ik_{z2}^- L_1} \right) \end{aligned} \quad (2.154)$$

Son inverse est :

$$\begin{aligned}
M_2'^{-1} &= \text{diag} \left(e^{-ik_{z2}^+ L_1}, e^{-ik_{z2}^- L_1}, e^{+ik_{z2}^+ L_1}, e^{+ik_{z2}^- L_1} \right) \\
&\times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} V_{p2}^-/V_{det2} & -V_{n2}^-/V_{det2} & 0 & 0 \\ -V_{p2}^+/V_{det2} & V_{n2}^+/V_{det2} & 0 & 0 \\ \frac{U_-^{n2} A_p}{V_{det2} A_{UdV}} & \frac{-U_-^{n2} A_n}{V_{det2} A_{UdV}} & \frac{idV_{np}^- \sin(k_{z2}^- L_2)}{A_{UdV}} & \frac{-U_-^{n2}}{A_{UdV}} \\ \frac{-U_+^{n2} A_p}{V_{det2} A_{UdV}} & \frac{U_+^{n2} A_n}{V_{det2} A_{UdV}} & \frac{-idV_{np}^+ \sin(k_{z2}^+ L_2)}{A_{UdV}} & \frac{U_+^{n2}}{A_{UdV}} \end{pmatrix} \quad (2.155)
\end{aligned}$$

avec

$$V_{det2} = V_{n2}^+ V_{p2}^- - V_{n2}^- V_{p2}^+ \quad (2.156)$$

$$A_{UdV} = i \left(U_+^{n2} dV_{np}^- \sin(k_{z2}^- L_2) - U_-^{n2} dV_{np}^+ \sin(k_{z2}^+ L_2) \right) \quad (2.157)$$

$$A_n = V_{n2}^- dV_{np}^+ \cos(k_{z2}^+ L_2) - V_{n2}^+ dV_{np}^- \cos(k_{z2}^- L_2) \quad (2.158)$$

$$A_p = V_{p2}^- dV_{np}^+ \cos(k_{z2}^+ L_2) - V_{p2}^+ dV_{np}^- \cos(k_{z2}^- L_2) \quad (2.159)$$

Nous en déduisons de même que cette matrice n'est inversible que si

$$U_{det2} \neq 0 \quad (2.160)$$

et

$$A_{UdV} \neq 0 \quad (2.161)$$

Et enfin nous avons

$$M_2'' = \begin{pmatrix} V_{n2}^+ e^{ik_{z2}^+ L} & V_{n2}^- e^{ik_{z2}^- L} & -V_{n2}^+ e^{-ik_{z2}^+ L} & -V_{n2}^- e^{-ik_{z2}^- L} \\ U_+^{n2} e^{ik_{z2}^+ L} & U_-^{n2} e^{ik_{z2}^- L} & U_+^{n2} e^{-ik_{z2}^+ L} & U_-^{n2} e^{-ik_{z2}^- L} \end{pmatrix} \quad (2.162)$$

et

$$M_3' = \begin{pmatrix} V_{n3} & -V_{n3} \\ U^{n1} & U^{n1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{ik_{z3} L} & 0 \\ 0 & e^{-ik_{z3} L} \end{pmatrix} \quad (2.163)$$

Conditions aux bords 4 :

Les équations sont similaires au jeu de conditions numéro 2 sauf que nous définirons de nouvelles quantités en analysant l'équation aux bords définissant le passage des neutrons d'une phase à l'autre donné dans l'équation 2.80. Ainsi nous aurons dans chaque plaque :

$$n_{n1}\delta v_{zn1}(t, \mathbf{r}) = n_{n2}\delta v_{zn2}(t, \mathbf{r}) - (n_{n2} - n_{n1})\delta v_{zp2}(t, \mathbf{r}) \quad \text{en } z = L_1 \quad (2.164)$$

$$n_{n3}\delta v_{zn3}(t, \mathbf{r}) = n_{n2}\delta v_{zn2}(t, \mathbf{r}) - (n_{n2} - n_{n3})\delta v_{zp2}(t, \mathbf{r}) \quad \text{en } z = L \quad (2.165)$$

Ce qui nous conduit à définir les quantités suivantes :

$$nV_1 = n_{n1}V_{n1} \quad (2.166)$$

$$nV_2^\pm = n_{n2}V_{n2}^\pm - (n_{n2} - n_{n1})V_{p2}^\pm \quad (2.167)$$

Nous remplacerons formellement V_{n1} par nV_1 et V_{n2}^\pm par nV_2^\pm dans les équations 2.118, 2.122, 2.123, 2.133 et 2.134. Ce qui donne :

$$M'_1 = \begin{pmatrix} U^{n1} & U^{n1} \\ U^{p1} & U^{p1} \\ nV_1 & -nV_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{ik_{z1}L_1} & 0 \\ 0 & e^{-ik_{z1}L_1} \end{pmatrix} \quad (2.168)$$

$$\begin{aligned} M'_2 &= \begin{pmatrix} U_+^{n2} & U_-^{n2} & 0 & 0 \\ U_+^{p2} & U_-^{p2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & nV_2^+ & nV_2^- \\ \Upsilon_+ \cos(k_{z2}^+ L_2) & \Upsilon_- \cos(k_{z2}^- L_2) & i\Upsilon_+ \sin(k_{z2}^+ L_2) & i\Upsilon_- \sin(k_{z2}^- L_2) \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\times \text{diag} \left(e^{ik_{z2}^+ L_1}, e^{ik_{z2}^- L_1}, e^{-ik_{z2}^+ L_1}, e^{-ik_{z2}^- L_1} \right) \end{aligned} \quad (2.169)$$

avec

$$\Upsilon_+ = U_+^{n2}U^{p3} - U_+^{p2}U^{n3} \quad \text{et} \quad \Upsilon_- = U_-^{n2}U^{p3} - U_-^{p2}U^{n3} \quad (2.170)$$

La matrice inverse de M'_2 s'écrit quant à elle :

$$\begin{aligned}
M_2'^{-1} &= \text{diag} \left(e^{-ik_{z2}^+ L_1}, e^{-ik_{z2}^- L_1}, e^{+ik_{z2}^+ L_1}, e^{+ik_{z2}^- L_1} \right) \\
&\times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} \frac{U_-^{p2}}{U_{det2}} & -\frac{U_-^{n2}}{U_{det2}} & 0 & 0 \\ -\frac{U_+^{p2}}{U_{det2}} & \frac{U_+^{n2}}{U_{det2}} & 0 & 0 \\ \frac{nV_2^- A_p}{U_{det2} A_{V\Upsilon}} & \frac{-nV_2^- A_n}{U_{det2} A_{V\Upsilon}} & \frac{i\Upsilon_- \sin(k_{z2}^- L_2)}{A_{V\Upsilon}} & \frac{-nV_2^-}{A_{V\Upsilon}} \\ \frac{U_{det2} A_{V\Upsilon}}{-nV_2^+ A_p} & \frac{U_{det2} A_{V\Upsilon}}{nV_2^+ A_n} & \frac{-i\Upsilon_+ \sin(k_{z2}^+ L_2)}{A_{V\Upsilon}} & \frac{A_{V\Upsilon}}{nV_2^+} \end{pmatrix} \quad (2.171)
\end{aligned}$$

avec

$$U_{det2} = U_+^{n2} U_-^{p2} - U_-^{n2} U_+^{p2} \quad (2.172)$$

$$A_{V\Upsilon} = i \left(nV_2^+ \Upsilon_- \sin(k_{z2}^- L_2) - nV_2^- \Upsilon_+ \sin(k_{z2}^+ L_2) \right) \quad (2.173)$$

$$A_n = U_-^{n2} \Upsilon_+ \cos(k_{z2}^+ L_2) - U_+^{n2} \Upsilon_- \cos(k_{z2}^- L_2) \quad (2.174)$$

$$A_p = U_-^{p2} \Upsilon_+ \cos(k_{z2}^+ L_2) - U_+^{p2} \Upsilon_- \cos(k_{z2}^- L_2) \quad (2.175)$$

Nous en déduisons de même que cette matrice n'est inversible que si

$$U_{det2} \neq 0 \quad (2.176)$$

et

$$A_{V\Upsilon} \neq 0 \quad (2.177)$$

Et enfin nous avons :

$$M_2'' = \begin{pmatrix} U_+^{n2} e^{ik_{z2}^+ L} & U_-^{n2} e^{ik_{z2}^- L} & U_+^{n2} e^{-ik_{z2}^+ L} & U_-^{n2} e^{-ik_{z2}^- L} \\ nV_2^+ e^{ik_{z2}^+ L} & nV_2^- e^{ik_{z2}^- L} & -nV_2^+ e^{-ik_{z2}^+ L} & -nV_2^- e^{-ik_{z2}^- L} \end{pmatrix} \quad (2.178)$$

et

$$M_3' = \begin{pmatrix} U^{n3} & U^{n3} \\ nV_1 & -nV_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{ik_{z3} L} & 0 \\ 0 & e^{-ik_{z3} L} \end{pmatrix} \quad (2.179)$$

Nous sommes maintenant munis de l'ensemble des matrices nécessaire à l'étude de la propagation des modes hydrodynamiques à travers les couches composée de neutrons et protons superfluides. Elles nous fourniront une base essentielle pour l'étude des excitations collectives dans ce type de matière.

2.4.2 Excitations collectives dans les « lasagnes »

Donner une température à un milieu correspond à définir un état d'excitation de ce milieu. C'est-à-dire que sont caractérisées les formes d'excitations thermiques et leurs taux d'excitation. Les modes hydrodynamiques font parties de ces excitations qui sont possibles pour la matière que nous venons de considérer [63, 68]. Il est habituel aussi de leur associer, ainsi qu'aux modes de vibration des réseaux cristallin, une particule fictive appelée « phonon ». En effet ces excitations ont un comportement similaire à des particules en mécanique quantique. Nous comprenons mieux maintenant ce que nous voulions dire par forme et taux d'excitation, ainsi à une forme d'excitation est associée une particule et le taux d'excitation est donné en quelque sorte par le nombre de ces particules. Pour le moment nous n'étudierons pas le taux d'excitations liées au modes hydrodynamiques, qui sera donné dans le dernier chapitre en faisant intervenir la température. Nous allons seulement essayer ici de voir sous quelles formes se présentent ces excitations liées aux modes hydrodynamiques.

En effet jusqu'à présent nous avons mené cette étude comme si nous avions un faisceau d'ondes qui traversait la matière étudiée dont la source extérieure est caractérisée par les coefficients $(\alpha_1^\pm, \beta_1^\pm)$ et une orientation fixée par \mathbf{q}_\parallel . Ainsi, après avoir franchi N couches nous pouvons caractériser notre onde en fonction des coefficients $(\alpha_1^\pm, \beta_1^\pm)$ à l'aide de produits de matrices sans nous être préoccupés des fréquences autorisées.

À partir du moment où ce milieu sera à température non nulle, il répartira une partie de cette chaleur sous forme de vibrations spécifiques aux modes hydrodynamiques et dont les propriétés ont été principalement données par l'étude de leur propagation dans la section 2.4. Nous établissons maintenant que le milieu lui-même est en quelque sorte sa propre source d'ondes et nous allons ainsi chercher à déterminer quelles sont les vibrations autorisées du milieu. Nous n'allons plus considérer que les coefficients $(\alpha_1^\pm, \beta_1^\pm)$ du terme « source » sont des paramètres libres et nous les relierons à une propriété intrinsèque du milieu.

La périodicité de ces structures, que nous n'avons pas encore réellement prise en compte, va jouer un rôle essentiel dans cette caractérisation. L'ouvrage de Brillouin et Parodi [20], synthétisant de nombreux travaux portant sur la propagation d'ondes dans les milieux périodiques, nous a mis sur la voie. Ainsi nous allons voir que les coefficients $(\alpha_3^\pm, \beta_3^\pm)$ et $(\alpha_1^\pm, \beta_1^\pm)$ sont liés par une relation de fermeture issue du théorème de Floquet-Bloch pour les équations différentielles à coefficients périodiques [43]. Ce théorème, qui est très utilisé dans les problèmes sur des réseaux périodiques en mécanique quantique, établit que la solution du problème suit un déphasage particulier après qu'une des variables ait parcourue une période donnée. Dans notre cas, si nous définissons par $\mathbf{R} = (R_x, R_y, R_z)$ la période spatiale du milieu, c'est-à-dire que ses propriétés sont invariantes par la

translation $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{R}$, alors ce théorème nous indique que la perturbation en potentiel chimique doit suivre la relation suivante :

$$\delta\mu^a(t, \mathbf{r} + \mathbf{R}) = e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}}\delta\mu^a(t, \mathbf{r}) \quad (2.180)$$

où \mathbf{q} définit l'impulsion de Bloch. Pour les « lasagnes » nous savons que toutes les valeurs de $\mathbf{R}_{||} = (R_x, R_y, 0)$ sont acceptées puisque cette invariance implique l'égalité des impulsions $\mathbf{k}_{||}$, que nous avons posée dans l'équation 2.86.

Par contre, d'après les caractéristiques des « lasagnes », R_z devra être un multiple de L (voir figure 2.9). C'est cette propriété qui va être à l'origine de nombreux effets intéressants et nous nous concentrerons en particulier sur la relation suivante, qui est induite par ce théorème :

$$\delta\mu_3^a(t, x, y, z + L) = e^{iq_z L}\delta\mu_1^a(t, x, y, z) \quad (2.181)$$

pour $0 \leq z \leq L_1$.

Dans l'expression des perturbations $\delta\mu^a$ les seules fonctions qui interviennent avec la variable z sont les exponentielles $(e^{ik_z^+ z}, e^{ik_z^- z}, e^{-ik_z^+ z}, e^{-ik_z^- z})$. Or nous savons que la relation 2.181 est vérifiée pour tout z , en particulier pour $0 \leq z \leq L_1$. Nous en déduisons donc que les coefficients en facteur de ces fonctions exponentielles sont égaux de part et d'autre de l'égalité 2.181. En d'autres termes nous écrirons :

$$diag(e^{ik_{z3}^+ L}, e^{ik_{z3}^- L}, e^{-ik_{z3}^+ L}, e^{-ik_{z3}^- L}) \begin{pmatrix} \alpha_3^+ \\ \alpha_3^- \\ \beta_3^+ \\ \beta_3^- \end{pmatrix} = e^{iq_z L} \begin{pmatrix} \alpha_1^+ \\ \alpha_1^- \\ \beta_1^+ \\ \beta_1^- \end{pmatrix} \quad (2.182)$$

Grâce au théorème de Floquet-Bloch, nous avons fermé le système d'équations, les coefficients $(\alpha_1^\pm, \beta_1^\pm)$ ne sont plus indépendants. Nous pouvons le voir en reprenant notre modèle de propagation où ces coefficients se transformaient via des produits de matrice pour déterminer la forme de l'onde dans la plaque considérée laissant libre certains coefficients. Si à cela nous ajoutons maintenant l'équation 2.182 issue de ce théorème nous avons autant d'équations que d'inconnues. Cette fermeture va nous permettre d'établir une relation de dispersion de type $\omega = \omega(\mathbf{q})$ dont ω sera une fonction déterminée plus loin qui nous donnera les modes autorisés. Un phonon sera donc caractérisé par deux quantités, un vecteur d'onde \mathbf{q} et une pulsation ou fréquence ω , fonction de ce vecteur d'onde. Cette relation de dispersion nous permettra ainsi d'obtenir des spectres d'excitations spécifiques du milieu, que nous tracerons et analyserons en détail dans le chapitre suivant.

Comme nous l'avons vu dans la partie propagation des modes hydrodynamiques 2.4, certains modes peuvent correspondre à une excitation d'une couche en particulier sans que le mode ne se propage à travers l'ensemble des couches.

Ainsi nous chercherons à établir une relation de dispersion la plus générale possible afin d'éviter que certains modes nous échappent. Pour cela nous allons considérer les coefficients $(\alpha_1^\pm, \beta_1^\pm)$, $(\alpha_2^\pm, \beta_2^\pm)$, et $(\alpha_3^\pm, \beta_3^\pm)$ comme des variables indépendantes.

Le problème consiste donc à reprendre l'ensemble des conditions aux bords ainsi que la relation 2.182 que nous venons d'établir pour obtenir une relation de dispersion indépendante des coefficients (α^\pm, β^\pm) . Le problème complet étant exprimé à l'aide d'équations linéaires, nous pourrions donc le formuler en terme de matrices.

Pour se faire, nous allons procéder de la même manière que dans la section 2.4.1, c'est-à-dire que nous allons utiliser en premier le jeu de conditions aux bords numéro 2.

Conditions aux bords 2 :

La variable que nous considérerons sera le vecteur $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2^+, \alpha_2^-, \beta_2^+, \beta_2^-)$ puisque nous aurons préalablement remplacé les coefficients (α_3, β_3) par (α_1, β_1) à l'aide de la relation 2.182. Nous pourrions écrire cette relation à partir d'une matrice par blocs comme suit :

$$\begin{pmatrix} M'_1(L_1) & -M'_2(L_1) \\ \Pi_3(L) & -M''_2(L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \alpha_2^+ \\ \alpha_2^- \\ \beta_2^+ \\ \beta_2^- \end{pmatrix} \equiv \Gamma_2 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \alpha_2^+ \\ \alpha_2^- \\ \beta_2^+ \\ \beta_2^- \end{pmatrix} = 0 \quad (2.183)$$

où $M'_1(L_1)$, $M'_2(L_1)$ et $M''_2(L)$ sont les matrices définies dans le paragraphe 2.4.1 équations 2.118, 2.119 et 2.133. Nous appellerons cette matrice Γ_2 , l'indice 2 désignant le numéro du jeu de conditions aux bords choisis. La matrice $\Pi_3(L)$ nous permet d'exprimer les conditions aux bords en $z = L$ à l'aide des coefficients (α_1, β_1) et se définit comme le produit de matrices suivant :

$$\Pi_3(L) = e^{iq_z L} M'_3(L) \times \text{diag}(e^{-ik_{z3}L}, e^{ik_{z3}L}) \quad (2.184)$$

De manière explicite cette matrice Γ s'écrit :

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} U_{n1} e^{ik_{z1}L_1} & U_{n1} e^{-ik_{z1}L_1} & U_{+}^{n2} e^{ik_{z22}^+L_1} & U_{-}^{n2} e^{ik_{z2}^-L_1} & U_{+}^{n2} e^{-ik_{z2}^+L_1} & U_{-}^{n2} e^{-ik_{z2}^-L_1} \\ U_{p1} e^{ik_{z1}L_1} & U_{p1} e^{-ik_{z1}L_1} & U_{+}^{p2} e^{ik_{z2}^+L_1} & U_{-}^{p2} e^{ik_{z2}^-L_1} & U_{+}^{p2} e^{-ik_{z2}^+L_1} & U_{-}^{p2} e^{-ik_{z2}^-L_1} \\ V_{n1} e^{ik_{z1}L_1} & -V_{n1} e^{-ik_{z1}L_1} & V_{n2}^{+} e^{ik_{z2}^+L_1} & V_{n2}^{-} e^{ik_{z2}^-L_1} & -V_{n2}^{+} e^{-ik_{z2}^+L_1} & -V_{n2}^{-} e^{-ik_{z2}^-L_1} \\ 0 & 0 & \Upsilon_{+} e^{ik_{z2}^+L} & \Upsilon_{-} e^{ik_{z2}^-L} & \Upsilon_{+} e^{-ik_{z2}^+L} & \Upsilon_{-} e^{-ik_{z2}^-L} \\ U_{n3} e^{iq_z L} & U_{n3} e^{iq_z L} & U_{+}^{n2} e^{ik_{z2}^+L} & U_{-}^{n2} e^{ik_{z2}^-L} & U_{+}^{n2} e^{-ik_{z2}^+L} & U_{-}^{n2} e^{-ik_{z2}^-L} \\ V_{n3} e^{iq_z L} & -V_{n3} e^{iq_z L} & V_{n2}^{+} e^{ik_{z2}^+L} & V_{n2}^{-} e^{ik_{z2}^-L} & -V_{n2}^{+} e^{-ik_{z2}^+L} & -V_{n2}^{-} e^{-ik_{z2}^-L} \end{pmatrix} \quad (2.185)$$

Si nous continuons de suivre la même philosophie de simplification des matrices que dans la section 2.4.1 précédente, nous pouvons effectuer une opération sur les deux premières lignes qui revient à reprendre l'équation 2.116 en $z = L_1$ soit :

$$\delta\mu_2^n(t, \mathbf{r}) U_1^P - \delta\mu_2^P(t, \mathbf{r}) U_1^n = 0 \quad \text{en } z = L_1 \quad (2.186)$$

Nous trouvons donc :

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} U^{n1} e^{ik_{z1}L_1} & U^{n1} e^{-ik_{z1}L_1} & U_+^{n2} e^{ik_{z2}^+L_1} & U_-^{n2} e^{ik_{z2}^-L_1} & U_+^{n2} e^{-ik_{z2}^+L_1} & U_-^{n2} e^{-ik_{z2}^-L_1} \\ 0 & 0 & \Upsilon_+ e^{ik_{z2}^+L_1} & \Upsilon_- e^{ik_{z2}^-L_1} & \Upsilon_+ e^{-ik_{z2}^+L_1} & \Upsilon_- e^{-ik_{z2}^-L_1} \\ V_{n1} e^{ik_{z1}L_1} & -V_{n1} e^{-ik_{z1}L_1} & V_{n2}^+ e^{ik_{z2}^+L_1} & V_{n2}^- e^{ik_{z2}^-L_1} & -V_{n2}^+ e^{-ik_{z2}^+L_1} & -V_{n2}^- e^{-ik_{z2}^-L_1} \\ 0 & 0 & \Upsilon_+ e^{ik_{z2}^+L} & \Upsilon_- e^{ik_{z2}^-L} & \Upsilon_+ e^{-ik_{z2}^+L} & \Upsilon_- e^{-ik_{z2}^-L} \\ U^{n3} e^{iq_zL} & U^{n3} e^{iq_zL} & U_+^{n2} e^{ik_{z2}^+L} & U_-^{n2} e^{ik_{z2}^-L} & U_+^{n2} e^{-ik_{z2}^+L} & U_-^{n2} e^{-ik_{z2}^-L} \\ V_{n3} e^{iq_zL} & -V_{n3} e^{iq_zL} & V_{n2}^+ e^{ik_{z2}^+L} & V_{n2}^- e^{ik_{z2}^-L} & -V_{n2}^+ e^{-ik_{z2}^+L} & -V_{n2}^- e^{-ik_{z2}^-L} \end{pmatrix} \quad (2.187)$$

Enfin nous pouvons échanger la ligne une et la ligne deux afin de la rendre visuellement plus facile à comprendre et nous pouvons la réécrire sous la forme de produits de matrices suivant :

$$\Gamma_2 = \Gamma'_2 \times \text{diag}(e^{ik_{z1}L_1}, e^{-ik_{z1}L_1}, e^{ik_{z2}^+L_1}, e^{ik_{z2}^-L_1}, e^{-ik_{z2}^+L_1}, e^{-ik_{z2}^-L_1}) \quad (2.188)$$

avec

$$\Gamma'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Upsilon_+ & \Upsilon_- & \Upsilon_+ & \Upsilon_- \\ U^{n1} & U^{n1} & U_+^{n2} & U_-^{n2} & U_+^{n2} & U_-^{n2} \\ V_{n1} & -V_{n1} & V_{n2}^+ & V_{n2}^- & -V_{n2}^+ & -V_{n2}^- \\ 0 & 0 & \Upsilon_+ e^{ik_{z2}^+L_2} & \Upsilon_- e^{ik_{z2}^-L_2} & \Upsilon_+ e^{-ik_{z2}^+L_2} & \Upsilon_- e^{-ik_{z2}^-L_2} \\ \eta U^{n1} e^{-ik_{z1}L_1} & \eta U^{n1} e^{ik_{z1}L_1} & U_+^{n2} e^{ik_{z2}^+L_2} & U_-^{n2} e^{ik_{z2}^-L_2} & U_+^{n2} e^{-ik_{z2}^+L_2} & U_-^{n2} e^{-ik_{z2}^-L_2} \\ \eta V_{n1} e^{-ik_{z1}L_1} & -\eta V_{n1} e^{ik_{z1}L_1} & V_{n2}^+ e^{ik_{z2}^+L_2} & V_{n2}^- e^{ik_{z2}^-L_2} & -V_{n2}^+ e^{-ik_{z2}^+L_2} & -V_{n2}^- e^{-ik_{z2}^-L_2} \end{pmatrix} \quad (2.189)$$

où nous avons remplacé e^{iq_zL} par η et les éléments portant l'étiquette 3 ont été remplacé par ceux portant l'étiquette 1 en raison de la périodicité du milieu. Nous en arrivons maintenant au point crucial de ce problème, en effet d'après les propriétés d'algèbre linéaire nous savons qu'il existe un vecteur $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2^+, \alpha_2^-, \beta_2^+, \beta_2^-)$ non nul de l'équation 2.183 si et seulement si la le déterminant de la matrice Γ_2 est nul. Sachant que le déterminant d'un produit de matrices est le produit des déterminants des matrices, nous devons donc avoir :

$$\det(\Gamma'_2(\omega, \mathbf{q})) = 0 \quad (2.190)$$

Dans l'équation 2.190 nous avons précisé que Γ'_2 est une fonction des variables ω et \mathbf{q} car c'est cette équation qui va définir la relation de dispersion que nous cherchions. Ainsi les seuls modes hydrodynamiques ou phonons autorisés sont ceux dont les variables ω et \mathbf{q} vérifient la relation complexe établit par l'équation 2.190.

Les autres conditions aux bords :

Les calculs pour obtenir les autres matrices Γ' sont tout à fait similaires pour chaque jeu de conditions aux bords. Nous ne ferons que donner ici les matrices sans détailler les calculs.

Pour le jeu de conditions aux bords numéro 1 nous aurons :

$$\Gamma'_1(\omega, \mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & dV_{np}^+ & dV_{np}^- & -dV_{np}^+ & -dV_{np}^- \\ V_{n1} & -V_{n1} & V_{n2}^+ & V_{n2}^- & -V_{n2}^+ & -V_{n2}^- \\ P_1 & P_1 & P_{2+} & P_{2-} & P_{2+} & P_{2-} \\ 0 & 0 & dV_{np}^+ e^{ik_{z2}^+ L_2} & dV_{np}^- e^{ik_{z2}^- L_2} & -dV_{np}^+ e^{-ik_{z2}^+ L_2} & -dV_{np}^- e^{-ik_{z2}^- L_2} \\ \eta V_{n1} e^{-ik_{z1} L_1} & -\eta V_{n1} e^{ik_{z1} L_1} & V_{n2}^+ e^{ik_{z2}^+ L_2} & V_{n2}^- e^{ik_{z2}^- L_2} & -V_{n2}^+ e^{-ik_{z2}^+ L_2} & -V_{n2}^- e^{-ik_{z2}^- L_2} \\ \eta P_1 e^{-ik_{z1} L_1} & \eta P_1 e^{ik_{z1} L_1} & P_{2+} e^{ik_{z2}^+ L_2} & P_{2-} e^{ik_{z2}^- L_2} & P_{2+} e^{-ik_{z2}^+ L_2} & P_{2-} e^{-ik_{z2}^- L_2} \end{pmatrix} \quad (2.191)$$

Pour le jeu de conditions aux bords numéro 3 nous aurons :

$$\Gamma'_3(\omega, \mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & dV_{np}^+ & dV_{np}^- & -dV_{np}^+ & -dV_{np}^- \\ V_{n1} & -V_{n1} & V_{n2}^+ & V_{n2}^- & -V_{n2}^+ & -V_{n2}^- \\ U^{n1} & U^{n1} & U_{+}^{n2} & U_{-}^{n2} & U_{+}^{n2} & U_{-}^{n2} \\ 0 & 0 & dV_{np}^+ e^{ik_{z2}^+ L_2} & dV_{np}^- e^{ik_{z2}^- L_2} & -dV_{np}^+ e^{-ik_{z2}^+ L_2} & -dV_{np}^- e^{-ik_{z2}^- L_2} \\ \eta V_{n1} e^{-ik_{z1} L_1} & -\eta V_{n1} e^{ik_{z1} L_1} & V_{n2}^+ e^{ik_{z2}^+ L_2} & V_{n2}^- e^{ik_{z2}^- L_2} & -V_{n2}^+ e^{-ik_{z2}^+ L_2} & -V_{n2}^- e^{-ik_{z2}^- L_2} \\ \eta U^{n1} e^{-ik_{z1} L_1} & \eta U^{n1} e^{ik_{z1} L_1} & U_{+}^{n2} e^{ik_{z2}^+ L_2} & U_{-}^{n2} e^{ik_{z2}^- L_2} & U_{+}^{n2} e^{-ik_{z2}^+ L_2} & U_{-}^{n2} e^{-ik_{z2}^- L_2} \end{pmatrix} \quad (2.192)$$

Et enfin pour le jeu de conditions aux bords numéro 4 nous aurons :

$$\Gamma'_4(\omega, \mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Upsilon_+ & \Upsilon_- & \Upsilon_+ & \Upsilon_- \\ U^{n1} & U^{n1} & U_{+}^{n2} & U_{-}^{n2} & U_{+}^{n2} & U_{-}^{n2} \\ nV_1 & -nV_1 & nV_2^+ & nV_2^- & -nV_2^+ & -nV_2^- \\ 0 & 0 & \Upsilon_+ e^{ik_{z2}^+ L_2} & \Upsilon_- e^{ik_{z2}^- L_2} & \Upsilon_+ e^{-ik_{z2}^+ L_2} & \Upsilon_- e^{-ik_{z2}^- L_2} \\ \eta U^{n1} e^{-ik_{z1} L_1} & \eta U^{n1} e^{ik_{z1} L_1} & U_{+}^{n2} e^{ik_{z2}^+ L_2} & U_{-}^{n2} e^{ik_{z2}^- L_2} & U_{+}^{n2} e^{-ik_{z2}^+ L_2} & U_{-}^{n2} e^{-ik_{z2}^- L_2} \\ \eta nV_1 e^{-ik_{z1} L_1} & -\eta nV_1 e^{ik_{z1} L_1} & nV_2^+ e^{ik_{z2}^+ L_2} & nV_2^- e^{ik_{z2}^- L_2} & -nV_2^+ e^{-ik_{z2}^+ L_2} & -nV_2^- e^{-ik_{z2}^- L_2} \end{pmatrix} \quad (2.193)$$

De manière générale la matrice Γ' s'écrira sous la forme :

$$\Gamma' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Gamma_{13} & \Gamma_{14} & \Gamma_{13} & \Gamma_{14} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{21} & \Gamma_{23} & \Gamma_{24} & \Gamma_{23} & \Gamma_{24} \\ \Gamma_{31} & -\Gamma_{31} & \Gamma_{33} & \Gamma_{34} & -\Gamma_{33} & -\Gamma_{34} \\ 0 & 0 & \Gamma_{13} e^{ik_{z2}^+ L_2} & \Gamma_{14} e^{ik_{z2}^- L_2} & \Gamma_{13} e^{-ik_{z2}^+ L_2} & \Gamma_{14} e^{-ik_{z2}^- L_2} \\ \eta \Gamma_{21} e^{-ik_{z1} L_1} & \eta \Gamma_{21} e^{ik_{z1} L_1} & \Gamma_{23} e^{ik_{z2}^+ L_2} & \Gamma_{24} e^{ik_{z2}^- L_2} & \Gamma_{23} e^{-ik_{z2}^+ L_2} & \Gamma_{24} e^{-ik_{z2}^- L_2} \\ \eta \Gamma_{31} e^{-ik_{z1} L_1} & -\eta \Gamma_{31} e^{ik_{z1} L_1} & \Gamma_{33} e^{ik_{z2}^+ L_2} & \Gamma_{34} e^{ik_{z2}^- L_2} & -\Gamma_{33} e^{-ik_{z2}^+ L_2} & -\Gamma_{34} e^{-ik_{z2}^- L_2} \end{pmatrix} \quad (2.194)$$

Un programme de calcul formel tel que *Mathematica*[®] nous permettra de trouver une expression formelle du déterminant de Γ' . En effet il se trouve que l'expression de se déterminant est relativement simple et nous permettra d'obtenir des solutions exactes de notre problème sans utiliser d'algorithmes calculant le déterminant d'une matrice 6×6 . Ainsi nous exprimerons ce déterminant comme un polynôme en la variable $\eta = e^{iq_z L}$ qui se révèle être du second degré comme suit :

$$\det(\Gamma') = [A\eta + B(1 + \eta^2)] e^{-i(k_{z1}L_1 + (k_{z2}^+ + k_{z2}^-)L_2)} \quad (2.195)$$

avec

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 \quad (2.196)$$

et

$$B = B_1 + B_2 \quad (2.197)$$

En détail nous avons :

$$A_1 = 8e^{i(k_{z2}^+ + k_{z2}^-)L_2} \left[1 - e^{i2k_{z1}L_1} \right] \Gamma_{13}\Gamma_{14}\Gamma_{21}^2\Gamma_{33}\Gamma_{34} \quad (2.198)$$

$$A_2 = \left(e^{2i(k_{z2}^+ + k_{z2}^-)L_2} - e^{2ik_{z1}L_1} \right) \left[\Gamma_{14}\Gamma_{23}\Gamma_{21} - \Gamma_{13}\Gamma_{24}\Gamma_{21} - \Gamma_{14}\Gamma_{21}\Gamma_{33} + \Gamma_{13}\Gamma_{21}\Gamma_{34} \right]^2 \quad (2.199)$$

$$A_3 = \left(e^{2i(k_{z1}L_1 + k_{z2}^+L_2)} - e^{2ik_{z2}^-L_2} \right) \left[\Gamma_{14}\Gamma_{23}\Gamma_{21} - \Gamma_{13}\Gamma_{24}\Gamma_{21} + \Gamma_{14}\Gamma_{21}\Gamma_{33} + \Gamma_{13}\Gamma_{21}\Gamma_{34} \right]^2 \quad (2.200)$$

$$A_4 = \left(e^{2i(k_{z1}L_1 + k_{z2}^-L_2)} - e^{2ik_{z2}^+L_2} \right) \left[\Gamma_{14}(\Gamma_{23}\Gamma_{21} - \Gamma_{21}\Gamma_{33}) - \Gamma_{13}(\Gamma_{24}\Gamma_{21} + \Gamma_{21}\Gamma_{34}) \right]^2 \quad (2.201)$$

$$A_5 = \left(1 - e^{2i(k_{z1}L_1 + (k_{z2}^+ + k_{z2}^-)L_2)} \right) \left[\Gamma_{14}(\Gamma_{23}\Gamma_{21} + \Gamma_{21}\Gamma_{33}) - \Gamma_{13}(\Gamma_{24}\Gamma_{21} + \Gamma_{21}\Gamma_{34}) \right]^2 \quad (2.202)$$

$$B_1 = 4e^{i(k_{z1}L_1 + k_{z2}^+L_2)} \left(e^{2ik_{z2}^-L_2} - 1 \right) \left[\Gamma_{14}\Gamma_{23} - \Gamma_{13}\Gamma_{24} \right] \Gamma_{14}\Gamma_{21}\Gamma_{21}\Gamma_{33} \quad (2.203)$$

$$B_2 = 4e^{i(k_{z1}L_1 + k_{z2}^-L_2)} \left(e^{2ik_{z2}^+L_2} - 1 \right) \left[\Gamma_{13}\Gamma_{24} - \Gamma_{14}\Gamma_{23} \right] \Gamma_{13}\Gamma_{21}\Gamma_{21}\Gamma_{34} \quad (2.204)$$

Nous avons maintenant tous les éléments pour effectuer la résolution numérique de ces équations et ainsi tracer, puis analyser, les spectres d'excitations que nous obtiendrons. Il suffira de remplacer les éléments Γ_{ij} par ceux correspondants aux conditions aux bords que nous aurons choisi.

Chapitre 3

Interprétation physique et exploitation des spectres d'excitations

« Ce n'est donc point dans les impressions que réside la science, mais dans le raisonnement sur les impressions ; car c'est par cette voie, semble-t-il, qu'on peut atteindre l'essence et la vérité, tandis qu'on ne le peut par l'autre voie. »

Platon, *Théétète* (~ 394 av J.C.)

Sommaire

3.1 Spectres d'excitations dans les « lasagnes »	121
3.2 Thermodynamique des étoiles à neutrons	147
Conclusion	154

Cette partie va en quelque sorte concrétiser le modèle théorique que nous avons développé précédemment. En effet nous allons montrer ici les résultats issus de la résolution numérique de ces équations dans les conditions qui nous intéressent. Nous tenterons d'interpréter ces résultats sur un plan physique et nous verrons par la suite comment nous allons les exploiter pour en déduire certaines propriétés thermiques des étoiles à neutrons, telle que la chaleur spécifique. Ce sont ces résultats qui ont été en partie publiés dans notre article [38].

3.1 Spectres d'excitations dans les « lasagnes »

3.1.1 Description d'un spectre d'excitation

Pour commencer cette partie concernant les résultats numériques et leur interprétation physique nous allons utiliser un exemple en particulier de « lasagne ». Nous prendrons les valeurs de cet exemple dans les résultats obtenus par Avancini et ses collaborateurs que nous a donnés Constança Da Providencia [6]. Il faut entre autre que ces valeurs soient calculées dans les conditions de température nulle et pour des proportions de neutrons, protons et électrons correspondant à l'équilibre β . L'une des interactions qui permet d'avoir des « lasagnes » dans ces conditions est de type RMF présentée dans la sous-section 1.3.2 et dénommée DDH δ . Avec cette interaction nous trouvons que les « lasagnes » apparaissent dans ces conditions pour des densités baryoniques comprises entre $n_B = 0.0769 \text{ fm}^{-3}$ et $n_B = 0.0840 \text{ fm}^{-3}$. Nous choisirons notre exemple pour une densité intermédiaire $n_B = 0.0800 \text{ fm}^{-3}$ dont les caractéristiques sont données dans le tableau suivant 3.1. C'est par ailleurs, ce même exemple qui a été utilisé dans notre article [38] et dont nous avons suivi le formalisme ici. Nous allons choisir aussi de développer cette première partie en nous fondant sur le jeu de conditions aux bords numéro 1.

TAB. 3.1: Tableau regroupant les caractéristiques d'une structure en « lasagne » à densité baryonique $n_B = 0.0800 \text{ fm}^{-3}$ avec les vitesses du son calculées pour l'interaction DDH δ , Avancini et al.[6] .

Paramètre	Unité	Plaque 1	Plaque 2	Total
L	(fm)	9.39748	7.38308	16.78056
n_B	(fm^{-3})	0.0701094	0.0925891	0.0800000
n_n	(fm^{-3})	0.0701094	0.0884529	0.0781802
n_p	(fm^{-3})	0	0.0041362	0.0018198
$Y_p = n_p/n_B$		0	0.0446728	0.0227481
u ou u_+	(c)	0.0641296	0.0384072	
u_-	(c)		0.1453740	

Mais avant de présenter les spectres d'excitations complets pour cet exemple, une petite étude « mathématique » s'impose afin de vérifier que nous avons des résultats cohérents physiquement et respectant les conditions imposées.

La recherche d'un mode collectif ou phonon consiste à chercher les valeurs de ω et \mathbf{q} qui annulent le déterminant de la matrice Γ' donnée dans la sous-section 2.4.2 du chapitre précédent. Pour déterminer les spectres d'excitations

nous cherchons ainsi les valeurs de la fréquence ω sur un intervalle donné qui annulent cette matrice en fonction de l'impulsion \mathbf{q} que nous ferons varier. Ainsi nous obtenons les valeurs pour lesquelles cette matrice admet comme valeur propre zéro. Il existe de nombreuses méthodes pour rechercher les « zéros » d'une fonction à plusieurs variables et nous allons détailler ici comment nous avons procédé. Dans notre cas pour une valeur donnée de \mathbf{q} nous testons les changements de signes des parties réelles et imaginaires du déterminant sur un échantillon régulier de l'intervalle de fréquence donné, puis nous déterminons précisément les valeurs de ω qui annulent ce déterminant à l'aide d'une méthode de la sécante. Notre étude « mathématique » des résultats consiste ainsi à prendre une solution (ω, \mathbf{q}) et de regarder comment évolue spatialement une perturbation associée à cette solution. Pour cela il suffit de définir, par exemple, une onde en pression dans la plaque 1, de la normer, c'est-à-dire que nous prenons α_1 et β_1 tels que $\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} = 1$ et d'observer ce qu'elle devient après avoir traversé deux plaques à l'aide des matrices de transmissions définies dans la section propagation des modes 2.4.1.

Pour illustrer ceci nous prendrons exemple sur la solution correspondant à une fréquence $\hbar\omega = 4.5$ MeV et un vecteur d'onde $\mathbf{q} = (0, 0, q_z = 0.126625 \text{ fm}^{-1})$.

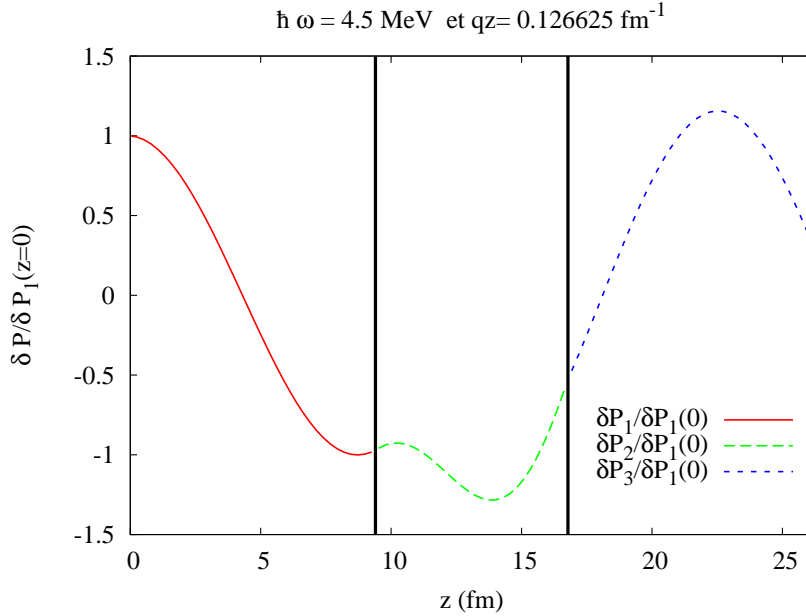


FIG. 3.1: Partie réelle de la variation de la perturbation en pression en fonction de la position z dans les plaques pour $\hbar\omega = 4.5$ MeV et $\mathbf{q} = (0, 0, q_z = 0.126625 \text{ fm}^{-1})$. Les barres verticales représentent les séparations entre plaques à densité $n_B = 0.0800 \text{ fm}^{-3}$.

Sur la figure 3.1 nous constatons que ce mode correspond à une oscillation non triviale de la perturbation en pression à travers les plaques. Ce qui montre que ces modes sont loin d'être de simples modes sonores sinusoïdaux pour la matière homogène. Nous remarquerons aussi que cette perturbation en pression est continue lors du passage d'une phase à l'autre, respectant la contrainte sur la pression que nous nous étions fixée. Alors que la variation de la perturbation en potentiel chimique des neutrons, sur la figure 3.2, n'est pas continue aux interfaces.

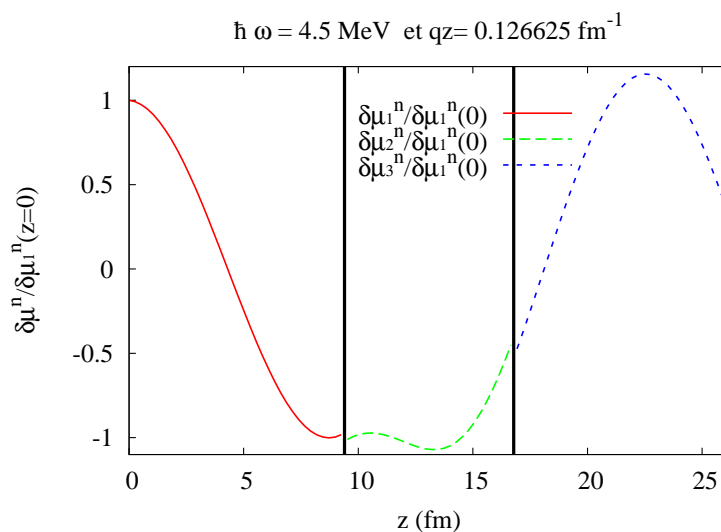


FIG. 3.2: Partie réelle de la variation de la perturbation en potentiel chimique des neutrons en fonction de la position z dans les plaques pour $\hbar\omega = 4.5$ MeV et $\mathbf{q} = (0, 0, qz = 0.126625 \text{ fm}^{-1})$. Les barres verticales représentent les séparations entres plaques.

Maintenant il ne nous reste plus qu'à faire varier ω et \mathbf{q} pour voir ce que donnent ces spectres d'excitations. Pour commencer nous prendrons un angle de propagation des modes qui est nul, ce qui correspond à prendre $\mathbf{q}_{\parallel} = 0$, afin de bien comprendre ce qu'il se passe dans le cas le plus simple.

Sur la figure 3.3 nous avons tracé en trait continu le spectre d'excitation issu de la relation de dispersion équation 2.190 pour des modes se propageant selon l'axe z dans des « lasagnes » à densité baryonique $n_B = 0.08 \text{ fm}^{-3}$. Nous l'avons tracé pour un intervalle d'énergie allant jusqu'à 6.2 MeV alors qu'au dessus de 1 MeV nous avons déjà dépassé la limite de validité de notre modèle et que des

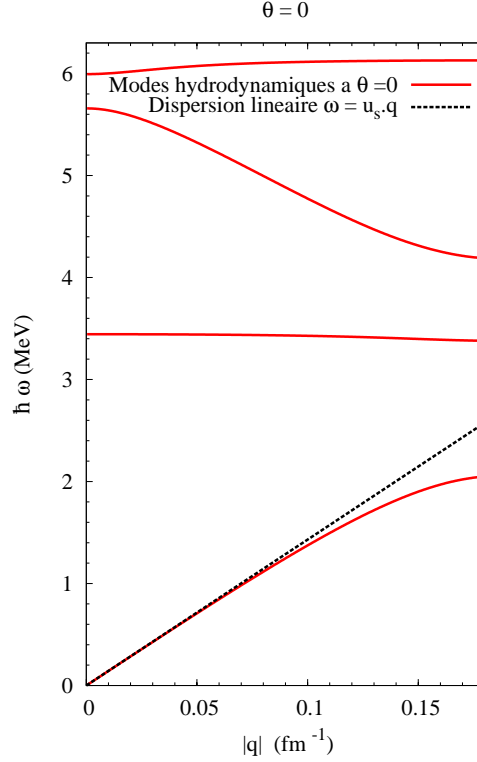


FIG. 3.3: Spectre d'excitation pour des modes se propageant selon l'axe z dans les « lasagnes » à densité baryonique $n_B = 0.0800 \text{ fm}^{-3}$. La droite en pointillés représente la relation de dispersion $\omega = u_s q$.

énergies aussi hautes n'ont pas d'effets mesurables sur les propriétés thermiques qui nous intéressent. Mais nous avons fait ce choix car au-dessus de 2 MeV ces spectres d'excitations nous montrent des propriétés tout à fait intéressantes. Par ailleurs nous avons limité notre intervalle d'impulsion à la zone de Brillouin ($-\pi/L \leq q_z \leq \pi/L$) comme il est préconisé de le faire dans l'étude des milieux périodiques. Cette restriction élimine l'incertitude que nous avons sur l'impulsion du mode et donc sa longueur d'onde pour une fréquence donnée [20]. Nous nous sommes même restreint à sa partie positive puisque le spectre est complètement symétrique par rapport à l'axe définie par $q_z = 0$.

Ainsi pour entrer un peu plus en détail dans cette description, nous pouvons remarquer que le spectre se décompose en deux parties bien distinctes qui sont caractéristiques des milieux périodiques. La première partie, dénommée branche

acoustique, correspond à la partie qui démarre à une énergie nulle. Elle a été appelée ainsi en raison des énergies auxquelles elle correspondait dans l'étude de certains réseaux atomiques.

Cette branche acoustique va jouer un rôle capital dans la suite de l'étude et notamment pour le calcul des propriétés thermiques. La quantité qui permet de la caractériser est sa pente à l'origine car elle a un comportement quasi-linéaire à basse énergie. Cette pente nous donne la vitesse du son dans ce milieu et vaut $u_{fit} = 0.072304 c$ dans notre exemple figure 3.3. Il est intéressant de remarquer que cette valeur est conforme aux vitesses du son que l'on peut trouver dans une matière nucléaire homogène ayant cette densité moyenne et cette proportion de protons, en particulier le mode sonore qui reste dans ces conditions est isovectoriel avec une vitesse du son $u_{m-} = 0.115867 c$. Nous pouvons en particulier approfondir cette description en reprenant la définition de base de la vitesse du son suivante :

$$u_s^2 = \frac{1}{m} \left. \frac{\partial P}{\partial n_B} \right|_{Y_p} \quad (3.1)$$

où n_B correspond à la densité moyenne de notre milieu.

Il suffit maintenant de prendre une cellule de Wigner-Seitz de longueur L correspondant à une « lasagne » et de regarder comment elle se comporte lors d'une contraction ou d'une dilatation entraînant un changement de taille δL selon l'axe z . Si nous considérons une section de surface de notre cellule parallèle aux plaques, d'aire S quelconque, nous pouvons lui associer le volume $V = L \cdot S$. Ainsi lors de ce changement de taille de la cellule, le nombre de particules N dans ce volume de cellule reste constant ainsi que l'aire S étant donné que nous considérons seulement des déplacements selon z . Nous avons de ce fait :

$$\delta L = \frac{\delta V}{S} = \frac{N}{S} \delta \left(\frac{V}{N} \right) \quad (3.2)$$

Or, par définition, la densité baryonique moyenne dans cette cellule s'écrit $n_B = N/V$. Nous trouvons donc que :

$$\delta L = L n_B \delta \left(\frac{1}{n_B} \right) = -\frac{L}{n_B} \delta n_B \quad (3.3)$$

C'est ici que la pression intervient puisque nous la relierons au changement de densité avec l'équation suivante :

$$\delta P = \left. \frac{\partial P}{\partial n_B} \right|_{Y_p} \delta n_B \quad (3.4)$$

Nous trouvons donc finalement que le changement de taille est relié à la pression de la manière suivante :

$$\delta L = - \frac{L}{n_B \left. \frac{\partial P}{\partial n_B} \right|_{Y_p}} \delta P \quad (3.5)$$

Nous allons maintenant prendre en compte le fait que notre cellule est en réalité composée de deux phases distinctes de tailles L_1 et L_2 comme nous l'avions posé.

Ainsi nous obtenons que $\delta L = \delta L_1 + \delta L_2$, mais d'après les conditions aux bords du jeu numéro 1, nous trouvons que $\delta P = \delta P_1 = \delta P_2$. De cette manière, en faisant le même raisonnement sur le changement de taille que précédemment dans chacune des phases nous trouvons la relation suivante :

$$\frac{L}{n_B u_s^2} = \frac{L_1}{n_{B1} u_{s1}^2} + \frac{L_2}{n_{B2} u_{s2}^2} \quad (3.6)$$

en prenant soin d'avoir défini pour chaque phase $i = 1, 2$ la vitesse suivante :

$$u_{si}^2 = \frac{1}{m} \left. \frac{\partial P_i}{\partial n_{Bi}} \right|_{Y_{pi}} \quad (3.7)$$

Notons que $u_{s1} = u_1$ par définition de la vitesse du son dans la matière de neutrons pure (cf. equation 2.19). Alors que u_{s2} est différente des vitesses u_{\pm} calculées précédemment. Pour notre exemple, nous avons en particulier $u_{s1} = 0.06413 c$ et $u_{s2} = 0.104506 c$, ainsi nous obtenons $u_s = 0.072511 c$, ce qui est très proche de la pente à l'origine calculée sur le spectre d'excitation figure 3.3. C'est cette relation de dispersion linéaire, $\omega = u_s q$, que nous avons tracée sur cette figure afin de montrer à quel point cette relation suit bien la tendance du spectre d'excitation.

Après avoir présenté l'essentiel en substance de la branche acoustique nous allons passer aux autres branches. Ces parties du spectre ont été regroupées sous le nom de branches optiques. Ce nom a été choisi parce qu'elles faisaient intervenir des énergies de types ondes infra-rouges dans l'étude de certains réseaux cristallins. Le point important à noter pour ces branches est qu'elles débutent avec une énergie non nulle alors que l'impulsion est nulle. Dans notre cas, la première branche optique commence à 3.444 MeV, ce qui est bien trop important pour la validité de notre modèle et de toute façon elles n'aurons pas d'effets sur les propriétés thermiques à des températures raisonnables de l'ordre de 10^9 K.

Nous pourrions remarquer que certaines branches optiques sont relativement horizontales. Cette horizontalité est due au fait que certaines fréquences sont interdites puisqu'elles annulent la quantité A_{PdV} définit dans la section propagation des modes à l'équation 2.146. En effet, dans cette section nous avons vu que si nous avons $A_{PdV} = 0$ alors il n'y a pas de transmission du mode d'une plaque à

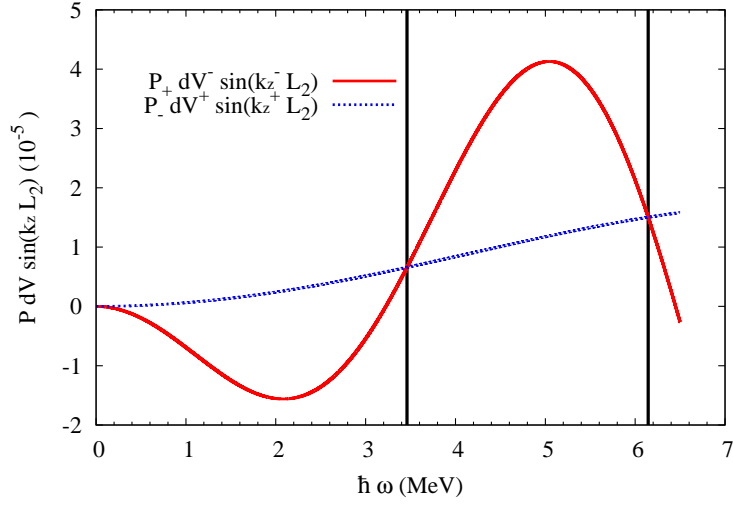


FIG. 3.4: Courbes traçant $P_{2+} dV_{\text{np}}^- \sin(k_{z2}^- L_2)$ et $P_{2-} dV_{\text{np}}^+ \sin(k_{z2}^+ L_2)$ en fonction de la fréquence $\hbar\omega$ comprise entre 0 et 6.5 MeV. Ces expressions sont exprimées dans des unités arbitraires. Les barres verticales indiquent les fréquences interdites.

l'autre. Ainsi le spectre étant « bloqué » par cette coupure il s'aplatit. Si nous nous rappelons que la quantité A_{PdV} est définie par l'équation :

$$A_{PdV} = i \left(P_{2+} dV_{\text{np}}^- \sin(k_{z2}^- L_2) - P_{2-} dV_{\text{np}}^+ \sin(k_{z2}^+ L_2) \right) \quad (3.8)$$

nous pourrions retrouver ces points d'annulation en regardant l'intersection des courbes représentant $P_{2+} dV_{\text{np}}^- \sin(k_{z2}^- L_2)$ et $P_{2-} dV_{\text{np}}^+ \sin(k_{z2}^+ L_2)$ en fonction de la fréquence ω . Nous pourrions constater sur la figure 3.4 que ces points d'intersection correspondent bien aux énergies pour lesquelles les branches optiques sont relativement horizontales.

Nous pourrions citer Brillouin et Parodi qui nous en donnent une belle description des branches acoustiques et optiques dans leur ouvrage *Propagation des ondes dans les milieux périodiques* [20] :

«En général, la branche issue de l'origine est appelée *branche acoustique* ; elle correspond à un mouvement des particules tel que dans chaque petite section du réseau, à un instant donné, toutes les masses se meuvent dans la même direction. Les autres branches sont appelées *branches optiques* ; elles correspondent à un mouvement dans lequel, à

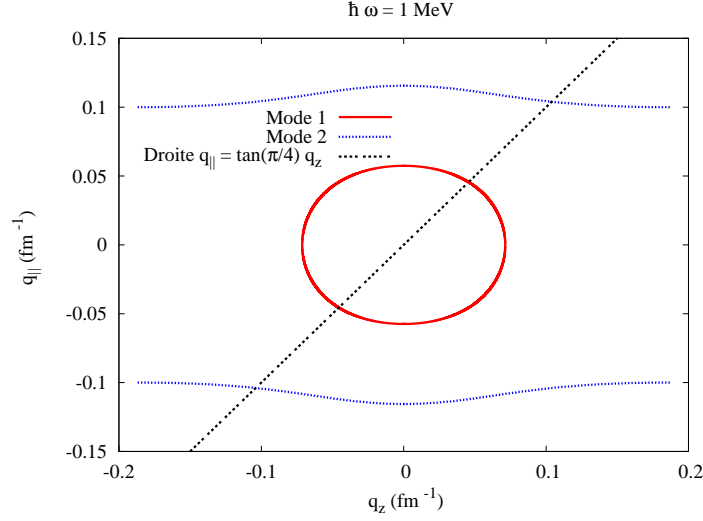


FIG. 3.5: Les courbes continues (rouges) et en pointillés (bleus) représentent l'ensemble des solutions de l'équation $\det(\Gamma'_2) = 0$ dans le plan des impulsions pour une fréquence fixée $\hbar\omega = 1$ MeV fixée. La courbe en tirés (noirs) représente la droite d'équation $q_{||} = \tan(\theta) q_z$ pour $\theta = \pi/4$.

un instant donné, un ou plusieurs types de particules se meuvent dans un sens, les autres types se déplaçant en sens contraire.»

3.1.2 Dépendance du spectre à l'angle de propagation

Il nous reste maintenant à examiner comment se comporte le spectre d'excitation pour des angles de propagation non nuls. Un tel spectre s'obtient en cherchant les points d'intersections entre la courbe représentant l'ensemble des solutions $(q_{||}, q_z)$ de $\det(\Gamma'_2) = 0$ à une fréquence ω fixée et la droite $|\mathbf{q}_{||}| \equiv q_{||} = \tan(\theta) q_z$, où θ désigne l'angle de propagation par rapport aux plaques. Sachant que nous avons ramené notre espace des impulsions à deux dimensions puisque q_x et q_y jouent strictement le même rôle et sont représentés par $q_{||}$.

Sur la figure 3.5 est représenté l'ensemble des points $(q_{||}, q_z)$ solutions de $\det(\Gamma'_2) = 0$, ils forment l'ensemble des modes autorisés à la fréquence $\hbar\omega = 1$ MeV. Nous avons tracé aussi la droite d'équation $q_{||} = \tan(\theta) q_z$ pour $\theta = \pi/4$.

Nous remarquerons sur cette figure qu'il existe deux points d'intersections pour $q_{||} \geq 0$, $\hbar\omega = 1$ MeV et $\theta \neq 0$. Le premier, sur la courbe rouge au centre, appartient à une courbe de forme elliptique et sera associé à la branche acoustique dont nous venons de parler. Le second point d'intersection appartient quant à lui à une

courbe, ici en bleue, proche d'une droite où l'impulsion $q_{||}$ est constante. Nous allons voir que cette seconde solution va décrire un nouveau phénomène intéressant qui n'existe que pour $\theta \neq 0$ et qui va jouer un rôle pour les propriétés thermiques plus important encore que la branche acoustique précédente. Puisque cette solution va fournir une seconde branche acoustique au spectre à relativement « basse » énergie.

Après cette première étude de la dépendance à l'angle des modes hydrodynamiques à ω fixé, nous allons maintenant regarder le spectre complet pour différents angles θ . Ces courbes correspondront à l'intersection dans l'espace à trois dimensions $(\omega, q_{||}, q_z)$ des solutions de $\det(\Gamma'_2) = 0$ avec le plan $q_{||} = \tan(\theta) q_z$.

Sur la figure 3.6 sont représentés plusieurs spectres d'excitations pour des angles de propagation par rapport aux plaques de $\theta = 0$, $\theta = \pi/8$, $\theta = \pi/4$ et $\theta = \pi/2$. Pour des angles compris entre $0 < \theta < \pi/2$ les modes d'excitations sont associés à des mouvements de particules à la fois parallèles et perpendiculaires aux plaques. Nous constatons que le mode acoustique précédent voit sa pente u_s augmenter passant de $0.072 c$ environ pour $\theta = 0$ à $0.085 c$ pour $\theta = \pi/2$.

Nous confirmons l'apparition de cette seconde branche acoustique en pointillés (bleues) que nous avions présagée précédemment. Elle n'a d'existence que pour des angles non nuls et prend approximativement la forme d'une relation de dispersion de type :

$$\omega = u'_s q_{||} = u'_s q \sin(\theta) \quad (3.9)$$

Cette seconde vitesse du son, u'_s varie de $0.0409 c$ pour $\theta = \pi/2$ à $0.05069 c$ pour $\theta \rightarrow 0$ ($q_z \gg q_{||}$), validant sa nécessaire prise en compte pour les propriétés thermiques de la croûte interne. Nous pourrions associer cette seconde branche à un mode de Goldstone puisque pour $\theta = 0$ nous avons une symétrie de rotation autour d'une axe perpendiculaire aux plaques, qui dans ce cas est associée à un mode d'énergie nulle, alors que pour $\theta \neq 0$ cette symétrie est brisée, laissant place à un mode de faible énergie non nulle.

Sur la figure 3.5 nous avons vu que ce mode est relativement indépendant de q_z et l'étude des spectres sur la figure 3.6 nous le confirme notamment au regard de l'équation 3.9. Ainsi, sachant que $q_{||}$ représente les mouvements parallèles aux plaques, nous pouvons associer ce mode d'excitation à une combinaison complexe de mouvements des protons et des neutrons parallèle aux plaques qui est quasiment indépendant des mouvements le long de l'axe z . En résumé nous pouvons dire que ce mode est donc purement lié à la géométrie en plaques de nos structures.

Dans la figure 3.6 nous nous sommes restreints à des valeurs de q inférieures à 0.35 fm^{-1} car au-delà le spectre devient quasiment une somme de droites parallèles ayant des énergies bien supérieures à toute limite raisonnable pour notre étude.

Il nous reste à déterminer quel est le degré de dépendance aux conditions aux bords de ces résultats très prometteurs.

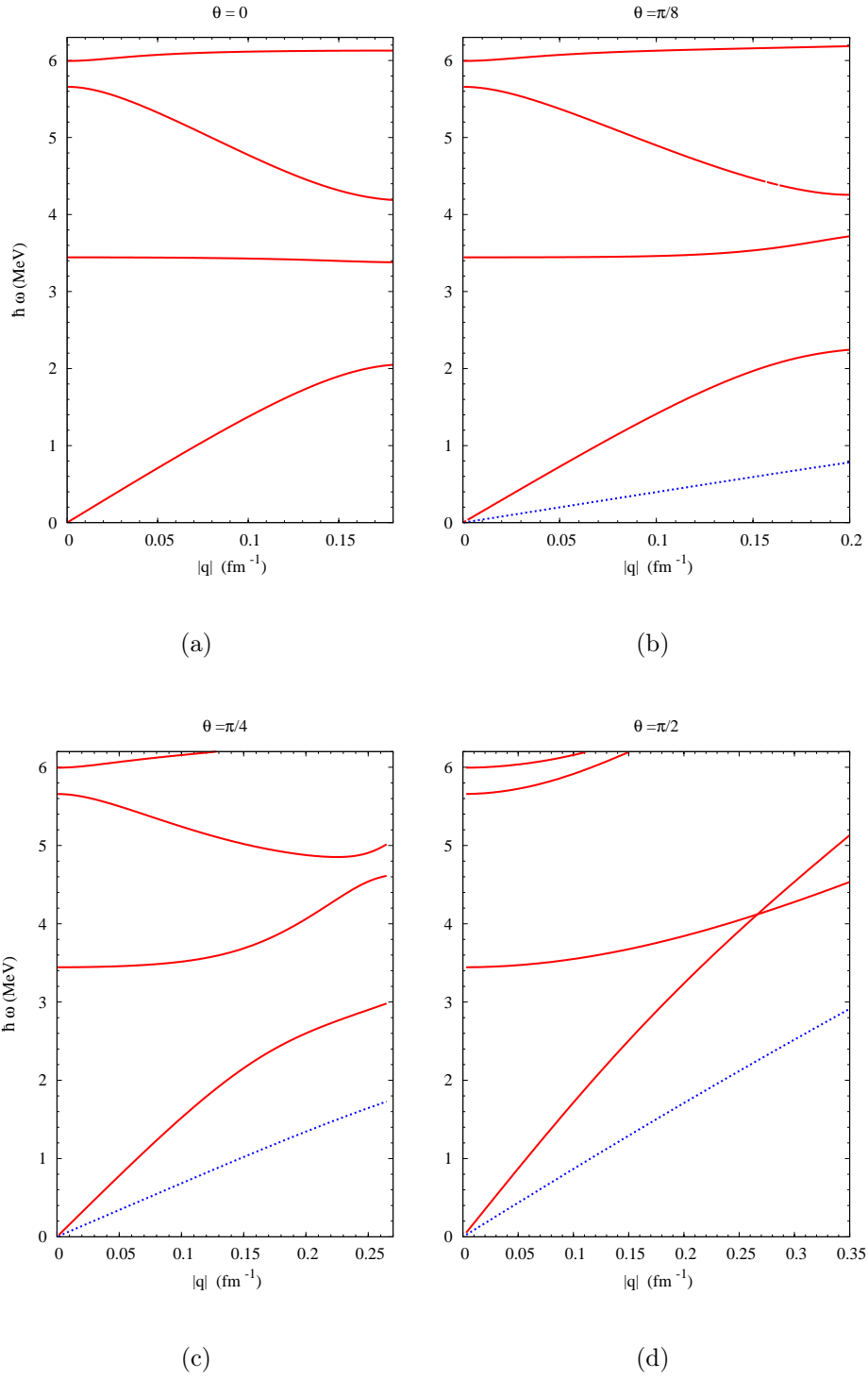


FIG. 3.6: Spectres d'excitations se propageant dans les « lasagnes » avec des angles $\theta = 0$ en (a), $\theta = \pi/8$ en (b), $\theta = \pi/4$ en (c), $\theta = \pi/2$ en (d).

3.1.3 Étude comparative des spectres d'excitations selon les conditions aux bords

Pour le même exemple de « lasagne » donné dans le tableau 3.1, nous allons étudier les spectres d'excitations ainsi que leur dépendance à l'angle de propagation pour plusieurs conditions aux bords.

Conditions aux bords 2 :

Le premier jeu de conditions aux bords que nous allons tester est celui numéro 2 donné dans l'équation 2.78.

Sur la figure suivante 3.7 nous avons présenté le spectre d'excitations pour les quatre angles de propagations ($\theta = 0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$). Nous remarquons ici que seule une branche optique apparaît entre 3 MeV et 6.5 MeV qui se sépare en deux branches pour de grand angles comme le montre la figure 3.7 (d) en $\theta = \pi/2$. Cette figure nous montre qu'il n'existe aucun mode possible dans ces « lasagnes » pour des fréquences inférieures à 3 MeV environ. Ces résultats sont en quelque sorte intéressants pour deux raisons. Premièrement, ces conditions aux bords nous montrent que ce type d'excitations dans ce cas sont inexistantes puisque par principe le premier mode pour des excitations collectives devrait être un mode acoustique. Deuxièmement, nous voyons ici clairement que les spectres d'excitations sont très dépendant des conditions aux bords puisque nous passons d'une forme habituelle de spectres dans des milieux périodiques à une absence totale de modes d'excitations en changeant les conditions aux bords.

Il se pourrait que le problème dans ce cas soit mal posé en terme d'équations ou de résolution numérique, mais l'ensemble des vérifications faites jusqu'à présent tend à montrer que ce sont bien ces résultats que nous devons obtenir. Pour le moment il ne nous est pas encore possible de tirer des conclusions détaillées sur les raisons de cette absence d'excitations. Nous pourrions éventuellement supposer que ce phénomène ne prend pas son origine dans la condition de continuité de la vitesse des neutrons puisqu'elle est commune aux deux jeux de conditions que nous avons utilisé jusqu'à présent. Il nous faut donc effectuer plusieurs tests avec d'autres conditions aux bords pour identifier les phénomènes physiques pertinents dans chaque spectres.

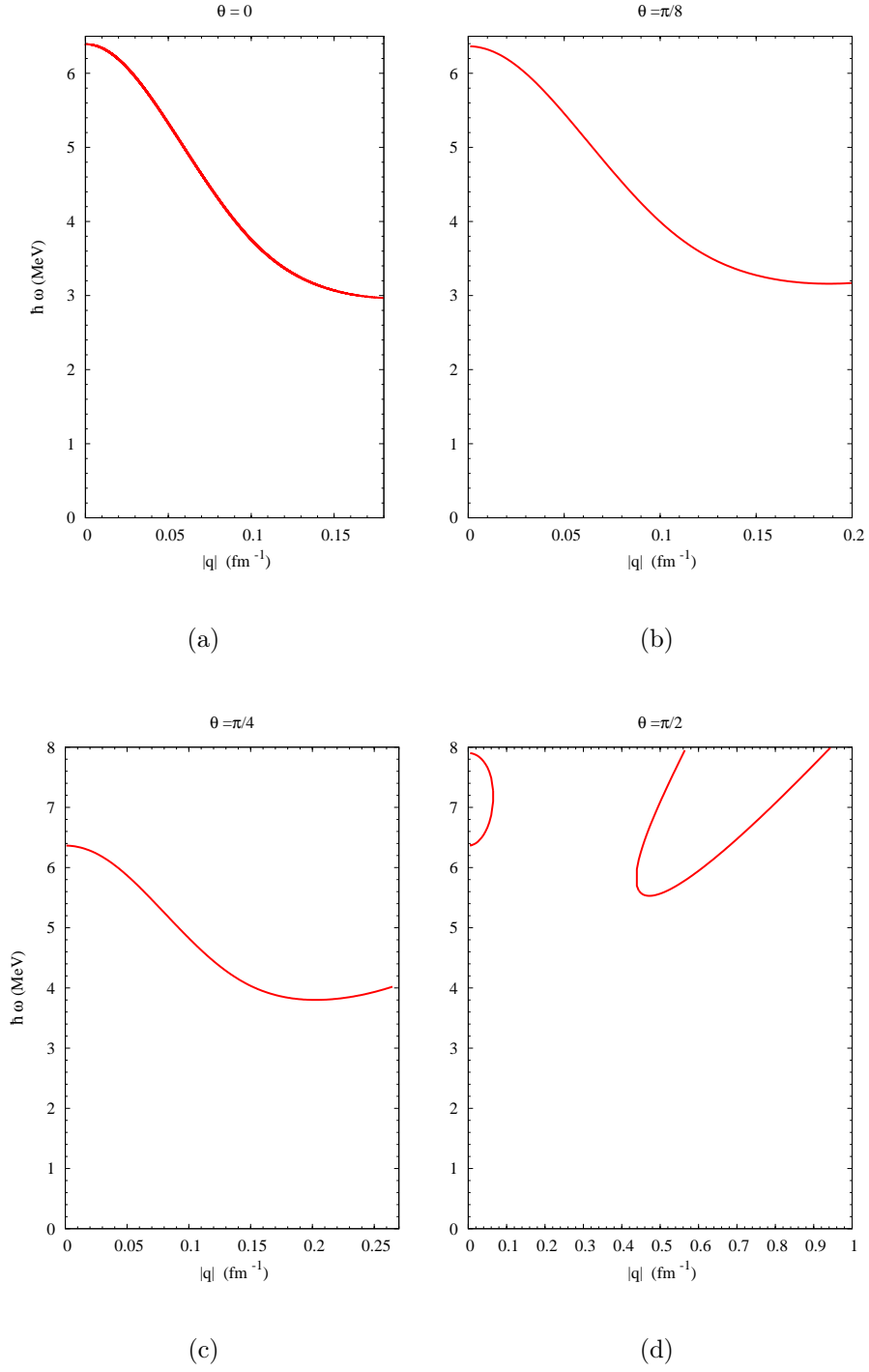


FIG. 3.7: Spectres d'excitations pour le jeu de conditions aux bords numéro 2 et se propageant dans les « lasagnes » avec des angles $\theta = 0$ en (a), $\theta = \pi/8$ en (b), $\theta = \pi/4$ en (c), $\theta = \pi/2$ en (d).

Conditions aux bords 3 :

Il est intéressant de voir que pour le jeu de conditions aux bords numéro 3 nous retrouvons la forme des premier spectres décrits précédemment. La pente à l'origine de la branche acoustique est légèrement supérieure à celles du jeux de conditions numéro 1 et vau x $u_{fit} = 0.076325 c$. En faisant un raisonnement similaire au premier cas pour trouver analytiquement cette pente, nous obtenons ici avec la continuité du potentiel chimique des neutrons la pente u_s suivante :

$$\frac{L}{u_s^2} = \frac{L_1}{u_{s1}^2} + \frac{L_2}{u_{s2}^2} \quad (3.10)$$

Nous aurons au préalable relié le changement de densité au changement de potentiel chimique de la manière suivante :

$$\delta\mu^n = \left. \frac{\partial\mu^n}{\partial n_B} \right|_{Y_p} \delta n_B \quad (3.11)$$

Ainsi en reprenant les valeurs précédentes de u_1 et u_{s2} nous trouvons $u_s = 0.077263 c$, qui là aussi s'ajuste bien au spectre. Nous avons tracé en pointillés sur la figure 3.8 en (a) la dispersion linéaire associé à u_s . Ensuite nous pouvons observer que ce jeu de conditions aux bords donne plus d'importance à la seconde branche acoustique puisque sa pente est plus petite dans ce cas en variant de $u'_s = 0.04 c$ en $\theta = 0$ à $u'_s = 0.047 c$ en $\theta = \pi/2$.

Le point remarquable ici est qu'au regard des combinaisons de conditions aux bords que nous avons posées depuis le début, nous pourrions conclure que la condition qui parasite le plus le spectre serait l'une des seules que nous avons posée dans le jeu numéro 2. C'est-à-dire celle qui autorise d'avoir deux surfaces distinctes définies par les protons et par les neutrons. En effet nous avons déjà évoqué précédemment que cette hypothèse pouvait poser problème et il semble que ce soit vérifié ici. Mais nous pouvons remarquer aussi que la condition de continuité du potentiel chimique des protons imposée uniquement dans le jeu numéro 2 a un effet tout aussi important dans la mesure où la condition de continuité de la pression ou du potentiel chimique des neutrons sont quasi identiques étant donné que $n_B \approx n_{n1} \approx n_{n2}$. Afin d'éliminer cette incertitude sur le rôle qu'ont les conditions aux bords sur les spectres d'excitations, nous allons tracer les spectres pour le même jeux de conditions numéro 3 mais cette fois-ci en gardant continue le potentiel chimique des protons plutôt que celui des neutrons.

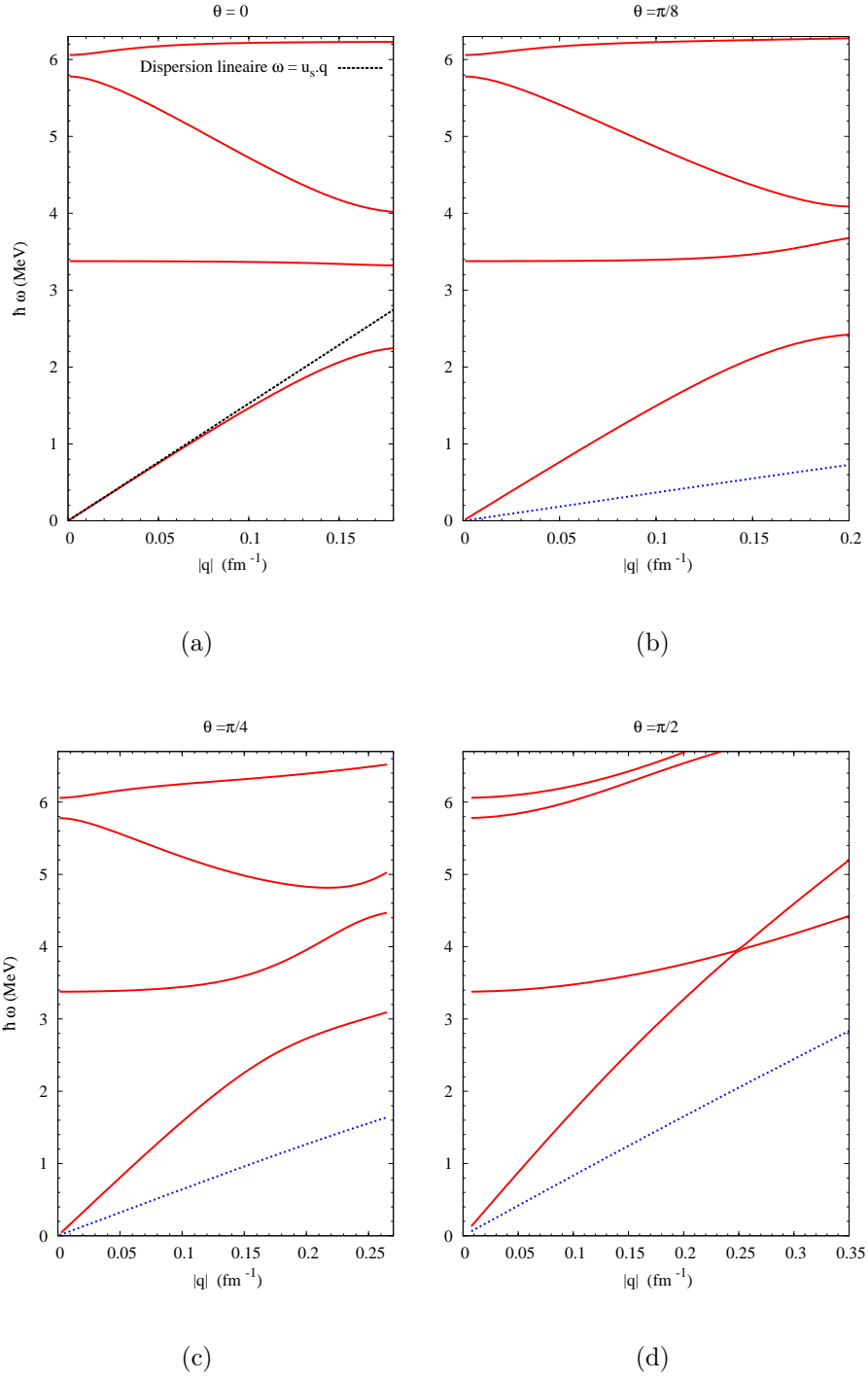


FIG. 3.8: Spectres d'excitations pour le jeu de conditions aux bords numéro 3 et se propageant dans les « lasagnes » avec des angles $\theta = 0$ en (a), $\theta = \pi/8$ en (b), $\theta = \pi/4$ en (c), $\theta = \pi/2$ en (d).

Conditions aux bords 3bis :

Dans ce paragraphe nous avons utilisé les mêmes conditions aux bords que précédemment mais cette fois-ci nous avons choisi garder continu le potentiel chimique des protons, soit :

$$[\mu^p] = 0 \quad (3.12)$$

Sur la figure 3.9 sont représentés les spectres d'excitations pour ce nouveaux jeux de conditions aux bords avec des angles de propagation $\theta = 0$ et $\theta = \pi/4$. Nous pourrions constater que ces conditions donnent des spectres assez différents de ceux obtenus juste avant, notamment nous pouvons remarquer l'augmentation importante de la pente lorsque l'angle de propagation augmente, ainsi que le comportement étrange des divers branches sur la partie haute en énergie, qui pourrait être associé à une forme d'instabilité du mode ou de fortes atténuations.

Cette observation nous montre que la continuité du potentiel chimique des protons affecte particulièrement la forme du spectre. Toutefois, cette condition aux bords ne suffit pas pour faire disparaître les branches acoustiques comme avec le jeu de conditions aux bords numéro 2. Ainsi nous aurions tendance à dire que c'est la combinaison des deux conditions aux bords les moins réalistes telles que la continuité du potentiel chimique ainsi que le dédoublement des surfaces, qui nous donnent ces résultats peu probants. Pour cela nous allons étudier un dernier jeux de conditions aux bords pour faire le tour de la question sur l'effet de celles-ci dans la forme des spectres.

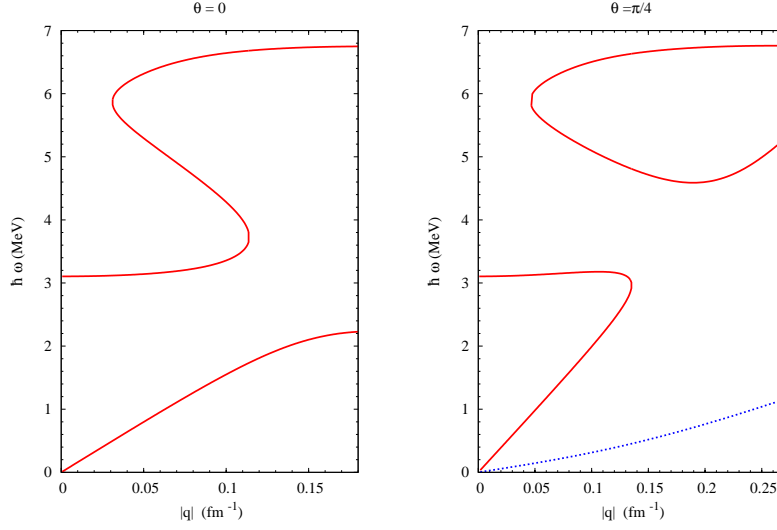


FIG. 3.9: Spectres d'excitations pour le jeu de conditions aux bords numéro 3bis et se propageant dans les « lasagnes » des angles $\theta = 0$ à gauche, $\theta = \pi/4$ à droite.

Conditions aux bords 4 :

Pour ce jeu de conditions aux bords nous observons que les spectres d'excitations sont sensiblement similaire à ceux obtenus avec le jeu 2. Là aussi, nous notons l'absence de branche acoustique et la première branche optique démarre à environ 3.2 MeV. Ces spectres ne sont donc pas réalistes. Le passage des neutrons d'une phase à l'autre était déjà exclu, ces spectres nous le confirment une fois de plus.

En conclusion de cette étude seuls les jeux de conditions aux bords numéro 1 et numéro 3 ont donné des résultats tout à fait satisfaisants. Le dédoublement des surfaces liées chacune à un constituant, la continuité du potentiel chimique des protons, ainsi que le passage des neutrons d'une phase à l'autre, qui revient aussi à une forme d'indétermination sur la surface décrite par les neutrons, sont les causes principales de la déformation des spectres les rendant irréalistes. Si un jour nous devions être amenés à voir que cette forme d'excitation de la matière ne correspond pas aux observations, peut être que nous devrions revoir notre description de ce modèle et que nous choisirions une autre de ces conditions aux bords pour satisfaire les observations. Pour le moment et par la suite de cette étude, nous allons garder uniquement les conditions aux bords qui nous semblent les plus pertinentes, c'est-à-dire celles qui sont dans le jeu numéro 1.

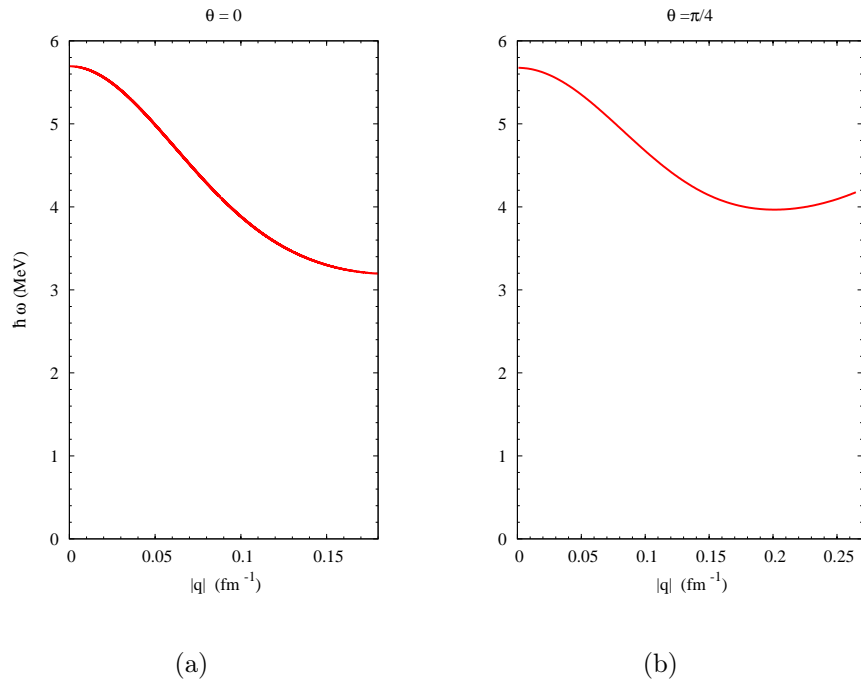


FIG. 3.10: Spectres d'excitations pour le jeu de conditions aux bords numéro 4 et se propageant dans les « lasagnes » avec des angles $\theta = 0$ en (a) et $\theta = \pi/4$ en (b).

3.1.4 Effet de l'entraînement sur les spectres

Après avoir exploré l'ensemble des conditions aux bords possibles, ainsi que leurs effets sur les spectres d'excitations, nous allons regarder plus en détails par la suite d'autres paramètres qui entrent en compte dans notre modèle. Nous commencerons par l'effet que peut avoir l'entraînement sur les spectres d'excitations. Pour cela nous annulerons ce dernier en établissant $K^{np} = K^{pn} = 0$, ce qui nous conduit à poser $K^{nn} = \frac{m}{n_n}$ et $K^{pp} = \frac{m}{n_p}$ quand $n_p \neq 0$.

TAB. 3.2: Tableau regroupant les vitesses du son qui interviennent dans les « lags » à densité baryonique $n_B = 0.0800 \text{ fm}^{-3}$ pour l'interaction DDH δ , Avancini et al.[6] avec et sans entraînement.

Vitesse (c)	Avec entraînement	Sans entraînement
u_1	0.0641296	0.0641088
u_{2+}	0.1453740	0.0354162
u_{2-}	0.0384072	0.136901
u_{s2}	0.104506	0.104506
u_s	0.072511	0.072492
u_{fit}	0.072304	0.072447

Dans le tableaux 3.2 nous donnons les différentes vitesses du son sans entraînement dont nous avons besoin et celles avec entraînement en comparaison. Globalement nous pouvons faire la remarque que ces vitesses sont quasi identiques, seule une légère diminution lorsqu'on retire l'entraînement peut être notée. Ce qui n'a rien d'étonnant puisque ce phénomène reste relativement faible dans la dynamique des particules. En dehors du calcul des vitesses du son, ce phénomène prend part aussi lorsque l'on détermine les vitesses des particules en fonction des perturbations en potentiels chimiques dans les équations 2.82 et 2.83, dans le but d'appliquer les conditions aux bords. Par contre n'oublions pas que même sans entraînement les protons et les neutrons restent couplés par l'interaction nucléaire de manière générale et en particulier dans nos équations à travers le calcul des potentiels chimiques.

Sur la figure 3.11 nous montrons les spectres d'excitations calculés sans entraînement à partir du jeu de conditions aux bords numéro 1 et pour des angles de propagation $\theta = 0$ en (a) et $\theta = \pi/4$ en (b). Sur cette figure nous observons que la pente à l'origine vaudrait $u_{fit} = 0.072447 c$, ce qui est légèrement inférieur à celle calculée sur la figure 3.3, tout comme la seconde branche acoustique a sa pente qui varie entre $u'_s = 0.04 c$ et $u'_s = 0.085 c$. Mais le spectre reste sensiblement fidèle à ce que nous avons déjà observé précédemment, laissant entendre, comme prévu, que

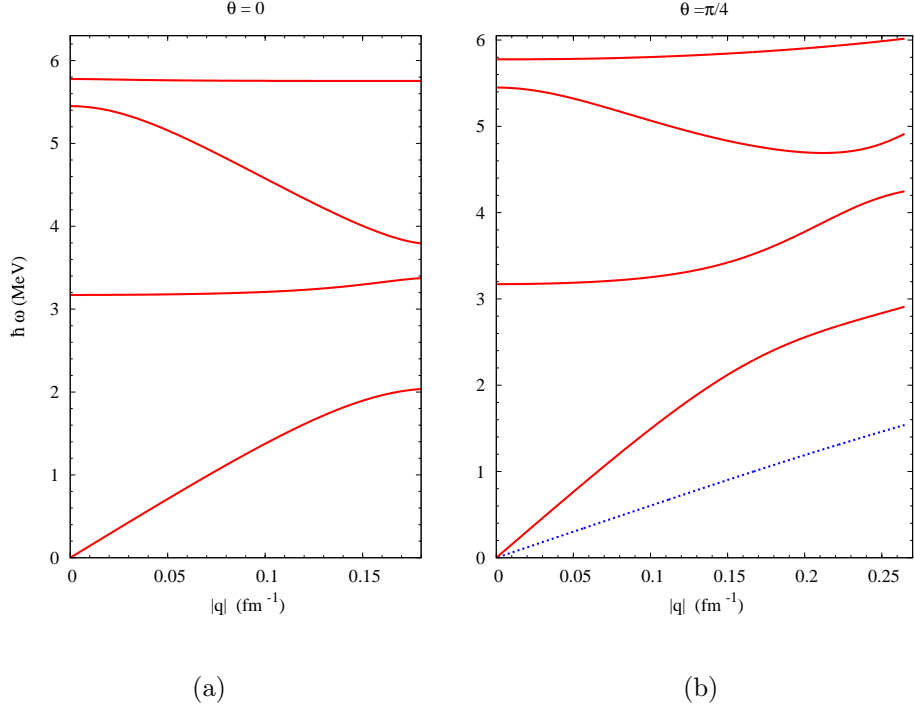


FIG. 3.11: Spectre d'excitation pour des modes se propageant dans les « lasagnes » à densité baryonique $n_B = 0.08 \text{ fm}^{-3}$ sans entraînement avec des angles $\theta = 0$ en (a) et $\theta = \pi/4$ en (b).

l'entraînement n'a pas d'effet important sur les spectres d'excitations. En réalité nous pourrions aller plus loin dans nos conclusions en affirmant, qu'en dehors des conditions aux bords, ce sont les vitesses du son qui semblent être des paramètres essentiels.

3.1.5 Spectres d'excitations avec l'interaction SLy4

Nous allons nous intéresser maintenant à l'effet produit par un changement de catégorie d'interaction sur les spectres. Notamment à des fins de vérification de la robustesse de notre modèle mais aussi pour voir comment se comportent ces spectres lorsque les paramètres liés à l'interaction changent. En effet, prendre une autre forme d'interaction va changer plusieurs paramètres telles que les vitesses du son. Nous avons fait la remarque précédemment que les vitesses de propagation jouaient un rôle très important dans notre modèle et nous allons le vérifier ici. Normalement ces changements doivent être en rapport aux écarts perçus dans les

vitesse du son entre la figure 2.2 (a) et 2.2 (b).

En premier lieu nous donnons dans le tableau 3.3, les vitesses du son qui interviennent dans notre structure en « lasagne » à densité baryonique $n_B = 0.0800 \text{ fm}^{-3}$ calculées avec les deux interactions que nous avons utilisées. Nous pouvons dire que ces deux interactions sont relativement cohérentes entre elles sauf que les vitesses calculées par l'interaction de type SLy4 sont un peu supérieures à celles pour l'interaction DDH δ , notamment dans la phase de neutrons pure.

TAB. 3.3: Tableau regroupant les vitesses du son qui interviennent dans les « lasagnes » à densité baryonique $n_B = 0.0800 \text{ fm}^{-3}$ avec les interactions SLy4 et DDH δ .

Vitesse (c)	Sly4	DDH δ
u_1	0.102033	0.0641296
u_{2+}	0.0196573	0.0384072
u_{2-}	0.156886	0.1453740
u_{s2}	0.114207	0.104506
u_s	0.10510	0.072511
u_{fit}	0.10472	0.072304

Après cette petite introduction sur les vitesses du son, nous pouvons en arriver à la description des spectres obtenus. Sur la figure 3.12 sont présentés les spectres d'excitations calculés avec l'interaction Sly4 pour des angles de propagations $\theta = 0$ en (a), $\theta = \pi/8$ en (b), $\theta = \pi/4$ en (c) et $\theta = \pi/2$ en (d). De prime abord, nous serions tenté de dire que ces spectres sont assez différents, mais en réalité ils ont de nombreux points communs. Le comportement du spectre en fonction de l'angle de propagation est semblable à la figure 3.6 où nous voyons la seconde branche acoustique apparaître pour des angles $\theta \neq 0$. Cette branche voit sa pente varier de $u'_s = 0.0011 c$ en $\theta = \pi/2$ à $u'_s = 0.010 c$ en $\theta \rightarrow 0$, ce qui est nettement plus faible qu'avec l'interaction DDH δ .

Ce qui change ici, c'est la pente à l'origine qui vaut ici $u_{fit} = 0.10472 c$ et qui s'ajuste bien avec la pente calculée à l'aide du modèle précédent équation 3.6 puisque $u_s = 0.10510 c$. Mais surtout le changement principal provient du fait que les fréquences interdites sont plus petites pour cette interaction comme l'indique la figure 3.13. En théorie sans ces coupures liées à la structuration de la matière nous devrions avoir un spectre qui suit de près la relation de dispersion tracée en pointillés. Mais à cause de ces coupures, le spectre vient se scinder en plusieurs parties augmentant le nombre de branches optiques. Ici la première branche optique intervient à plus faible énergie que pour l'interaction de type DDH δ . Pour conclure sur cette interaction nous pourrions nous attendre à obtenir des proprié-

tés thermiques similaires à ceux obtenus avec l'interaction $DDH\delta$ sachant qu'ici la pente du premier mode acoustique est certes plus importante mais celle de second mode acoustique vient compenser par sa nette infériorité.

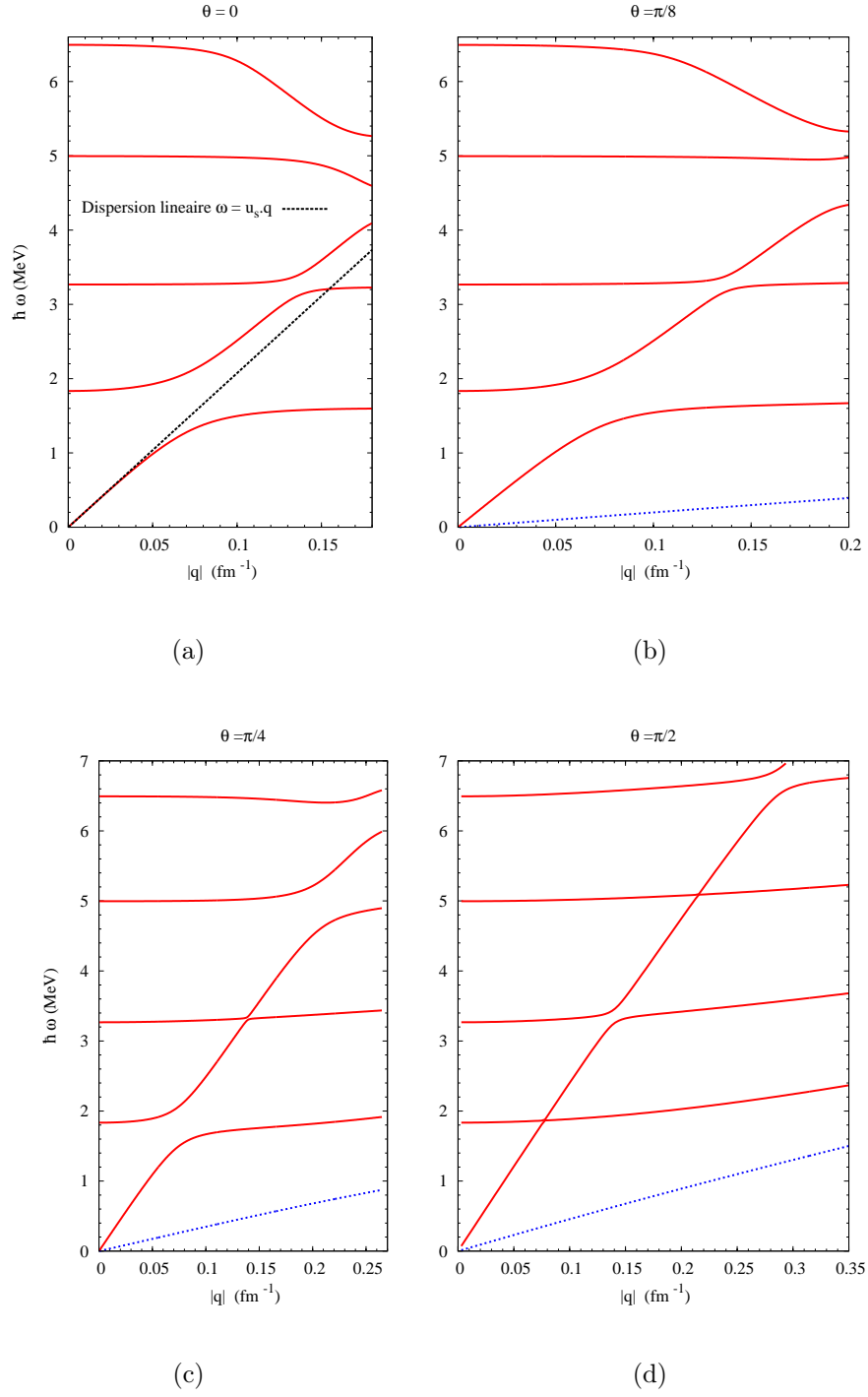


FIG. 3.12: Spectres d'excitations pour l'interaction de type SLy4 avec le jeu de conditions aux bords numéro 1 et se propageant dans les « lasagnes » avec des angles $\theta = 0$ en (a), $\theta = \pi/8$ en (b), $\theta = \pi/4$ en (c), $\theta = \pi/2$ en (d).

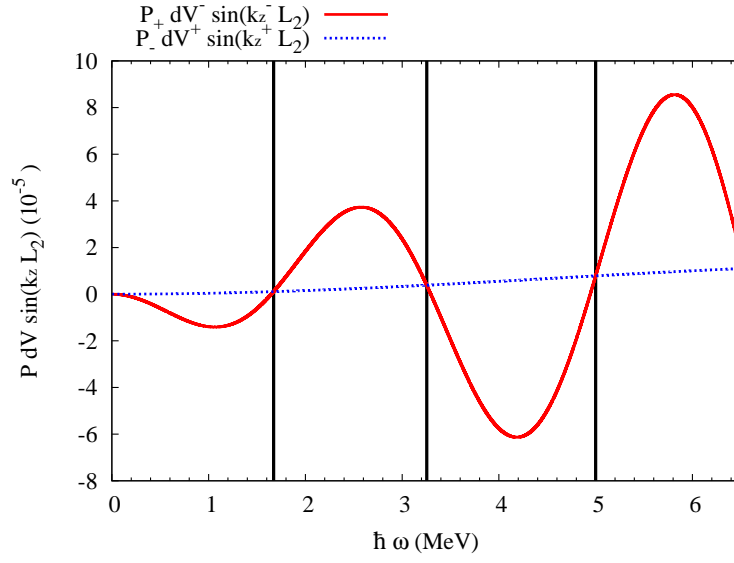


FIG. 3.13: Courbes traçant $P_{2+} dV_{\text{np}}^- \sin(k_{z2}^- L_2)$ et $P_{2-} dV_{\text{np}}^+ \sin(k_{z2}^+ L_2)$ en fonction de la fréquence $\hbar \omega$ comprise entre 0 et 6.5 MeV avec l'interaction de type SLy4. Ces expressions sont exprimées dans des unités arbitraires. Les barres verticales indiquent les fréquences interdites.

3.1.6 Extrapolation du modèle

Afin d'envisager ce qui pourrait nous attendre à plus faible densité et donc pour d'autres géométries nous allons extrapoler notre modèle en utilisant les caractéristiques d'un exemple de « spaghetti » et de « gnocchi ». C'est-à-dire que nous prendrons les rayons de ces structures et nous les considérerons comme définissant les dimensions d'une structure en « lasagne ». L'inconvénient d'utiliser un tel modèle pour d'autres géométries réside essentiellement dans l'aplatissement des structures en 2D et 3D. En effet la phase dense, devenant plate, va avoir beaucoup trop d'importance en établissant une proportion de celle-ci beaucoup trop élevée dans la cellule de Wigner-Seitz. Mais qu'à cela ne tienne, nous prendrons malgré tout des ondes planes se propageant dans un des axes du réseau formé par ces structures et nous interpréterons avec précaution ces spectres extrapolés. Par contre nous ne ferons pas varier l'angle de propagation étant donné que les conditions décrivant cette dépendance à l'angle sont tout à fait caractéristiques de la géométrie de système.

Les « spaghetti » dans les conditions de température nulle et d'équilibre β apparaissent avec l'interaction DDH δ pour des densités baryoniques comprises entre $n_B = 0.0635 \text{ fm}^{-3}$ et $n_B = 0.0768 \text{ fm}^{-3}$. Nous prendrons notre exemple à une densité intermédiaire $n_B = 0.0702 \text{ fm}^{-3}$ et dont les caractéristiques sont données dans le tableau 3.4 suivant.

TAB. 3.4: Tableau regroupant les caractéristiques d'une structure en « spaghetti » à densité baryonique $n_B = 0.0702 \text{ fm}^{-3}$ avec les vitesses du son calculées pour l'interaction DDH δ , Avancini et al.[6]. Les distances indiquées sont les diamètres des structures.

Paramètre	Unité	Plaque 1	Plaque 2	Total
L	(fm)	11.36848	11.88232	23.2508
n_B	(fm^{-3})	0.0606510	0.0972130	0.0702
n_n	(fm^{-3})	0.0606510	0.09084322	0.06853639
n_p	(fm^{-3})	0	0.006369785	0.001663614
$Y_p = n_p/n_B$		0	0.0655240	0.0236982
u ou u_+	(c)	0.0442766	0.0536615	
u_-	(c)		0.160759	

Nous prendrons un second exemple parmi les « gnocchi » qui apparaissent dans les mêmes conditions avec la même interaction pour des densités baryoniques comprises entre $n_B = 0.0634 \text{ fm}^{-3}$ et $n_B = 0.0013 \text{ fm}^{-3}$. De la même manière nous prendrons notre exemple à densité intermédiaire soit pour $n_B = 0.0324 \text{ fm}^{-3}$. Le tableau 3.5 récapitule les caractéristiques de cette structure.

TAB. 3.5: Tableau regroupant les caractéristiques d’une structure en « gnocchi » à densité baryonique $n_B = 0.0324 \text{ fm}^{-3}$ avec les vitesses du son calculées pour l’interaction DDH δ , Avancini et al.[6]. Les distances indiquées sont les diamètres des structures.

Paramètre	Unité	Plaque 1	Plaque 2	Total
L	(fm)	15.49368	17.78572	33.2794
n_B	(fm^{-3})	0.109097	0.0237917	0.0324
n_n	(fm^{-3})	0.109097	0.0209897	0.03110344
n_p	(fm^{-3})	0	0.00280197	0.001296561
$Y_p = n_p/n_B$		0	0.117771	0.0400173
u ou u_+	(c)	0.0384556	0.0877463	
u_-	(c)		0.191973	

À partir de ces exemples que nous avons utilisés tels des « lasagnes », nous avons obtenus les spectres suivant dans les figures 3.14b pour notre exemple de « spaghetti » et 3.14c pour notre exemple de « gnocchi ». Et enfin comme référence nous redonnons le spectre obtenu pour notre exemple de « lasagne » initiales figure 3.14a.

Il est remarquable de voir que ces spectres se ressemblent à l’échelle d’énergie près. Nous constatons ainsi que les pentes à l’origine, $u_{fit} = 0.052548 c$ pour l’exemple de « spaghetti » et $u_{fit} = 0.031881 c$ pour l’exemple de « gnocchi », ainsi que les niveaux d’énergies de manière générales, diminuent avec la densité. Ceci n’est pas très surprenant quand on sait que les vitesses du son dans la matière nucléaire diminuent avec la densité. En tout cas, cette observation nous confirme que certainement les structures à faible densité jouent un rôle très important dans les propriétés thermiques vis à vis de ces modes collectifs. Cette constatation est plutôt rassurante puisqu’elle semble valider l’intérêt de développer, en terme de résultats exploitables, un modèle adapté aux autres géométries même si de nombreuses complications peuvent changer l’ensemble des résultats montrés ici pour les autres géométries.

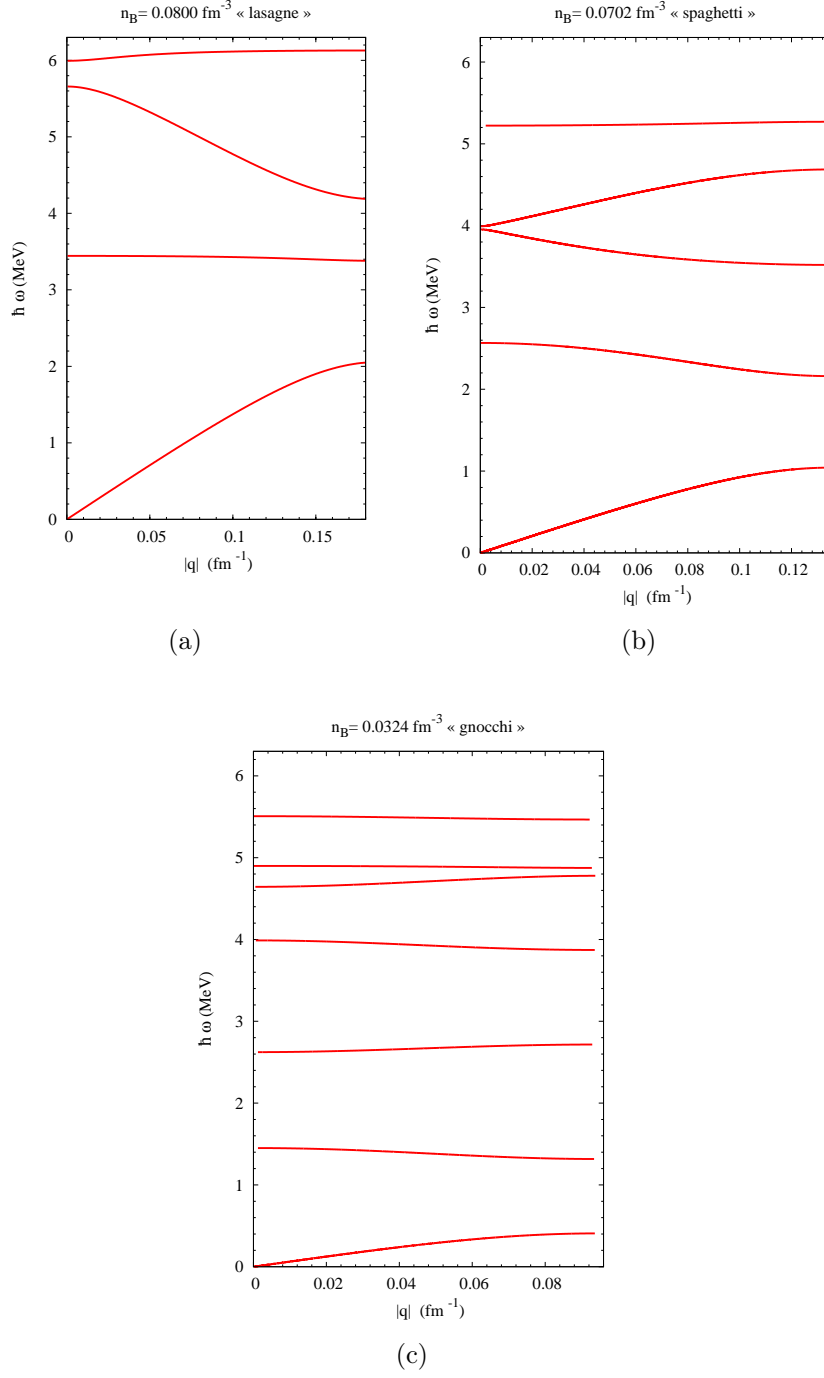


FIG. 3.14: Spectre d'excitation pour des modes se propageant selon l'axe z dans les « lasagnes » à densité baryonique $n_B = 0.0800 \text{ fm}^{-3}$ en (a), dans les « spaghetti » à densité baryonique $n_B = 0.0702 \text{ fm}^{-3}$ en (b) et dans les « gnocchi » à densité baryonique $n_B = 0.0324 \text{ fm}^{-3}$ en (c).

3.2 Thermodynamique des étoiles à neutrons

3.2.1 Contribution des modes hydrodynamiques à la densité d'énergie thermique

Nous en arrivons maintenant à l'exploitation des résultats obtenus précédemment. Plus exactement nous allons utiliser ces spectres d'excitations pour calculer la chaleur spécifique qui leur est associée à une température T . En effet, à chaque mode (ω, \mathbf{q}) peut lui être associé un phonon dont le nombre sera déterminé par la fonction de répartition qui leur correspond d'après leur nature. Cette introduction de la température nécessite quelques précisions et rappels. En théorie une température non nulle devrait affecter plusieurs points de notre modèle. Les deux premiers que nous avons déjà évoqués sont l'introduction d'un fluide normal dans l'hydrodynamique et la modification des paramètres d'entrainements. Par ailleurs toutes les fonctions de distributions qui entrent dans les calculs de paramètres, notamment dans les potentiels chimiques, devraient être modifiées aussi. Mais comme nous l'avons dit, nous sommes dans une relativement bonne approximation en nous plaçant à température nulle pour tout ce qui des calculs hydrodynamiques et donc des spectres d'excitations. Nous n'oublions pas non plus qu'il faudrait aussi prendre en compte les changements des caractéristiques des structures à température non nulle. Mais là aussi ces changements sont mineurs tant que nous prendrons une matière bien en dessous de la température critique, raison d'être de notre modèle [101, 8].

Ces considérations faites le seul point où cette température doit être prise en compte correspond au calcul du nombre de phonons donné par la fonction de distribution qui lui est associée. Ce nombre n'est rien d'autre que le taux d'excitation qui permet d'obtenir la densité d'énergie associée à cette forme d'excitation.

Déterminons donc cette fonction de distribution, en particulier nous allons voir quelle est sa forme, bosonique ou fermionique, et nous allons donner quelques précisions sur le potentiel chimique de ces phonons.

Le choix de la forme de la fonction de distribution se fait en considérant que les excitations collectives peuvent être en nombre illimité. Ainsi chaque état d'excitation peut avoir un nombre d'occupation illimité [63]. Une telle propriété en physique quantique ne peut qu'être associée à un spectre de Bose. Par ailleurs, le nombre de phonons, N_{ph} , qui ne sont rien d'autre que des quasi-particules, est déterminé par la condition d'équilibre thermique. C'est-à-dire que nous devons avoir, à volume et température fixés, la relation suivante :

$$\frac{\partial F}{\partial N_{ph}} = 0 \quad (3.13)$$

où F désigne l'énergie libre. Or cette quantité représente en réalité le potentiel

chimique, ainsi nous avons $\mu_{ph} = 0$. La fonction de distribution qui est donc associée à nos excitations collectives s'écrit :

$$n(\hbar\omega) = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \quad (3.14)$$

où $\hbar\omega$ définit l'énergie du phonon d'impulsion \mathbf{q} . À partir de là, en intégrant sur tous les états, c'est-à-dire sur toutes les impulsions, nous retrouvons la densité d'énergie associée à ces excitations. Ainsi en prenant soin de bien séparer les deux composantes de l'impulsion qui jouent un rôle différent, nous pouvons établir que cette densité d'énergie s'écrit :

$$\mathcal{E}(T) = \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \frac{dq_z}{2\pi} \int \frac{d^2 q_{||}}{(2\pi)^2} \hbar\omega(\mathbf{q}) \frac{1}{e^{\hbar\omega(\mathbf{q})/k_B T} - 1} \quad (3.15)$$

Cette quantité sera l'élément de base pour notre étude thermique de la croûte interne qui va suivre. Car en général les modèles d'évolution thermique utilisent une quantité dérivée de la densité d'énergie, la chaleur spécifique qui entre en tant que coefficient dépendant de la température dans les équations différentielles. Celle-ci se définit à volume constant de la manière suivante :

$$C_v(T) = \left. \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T} \right|_V \quad (3.16)$$

Pour anticiper un peu sur l'analyse des résultats que nous allons obtenir, nous traitons le cas particulier de la relation de dispersion linéaire, $\omega = uq$, qui se trouve avoir une solution analytique. En effet la primitive dont nous avons besoin s'écrit :

$$\int dZ \frac{Z^{\alpha-1}}{e^Z - 1} = \Gamma(\alpha)\zeta(\alpha) \quad (3.17)$$

où Γ est la fonction gamma et ζ la fonction zêta de Riemann. Nous avons montré auparavant que la première branche acoustique suivait approximativement la relation $\omega = u_s q$, ce qui correspond à $\alpha = 4$ et ainsi nous trouvons :

$$C_v^s = \frac{2\pi^2 k_B^4 T^3}{15\hbar^3 u_s^3} \equiv bT^3 \quad (3.18)$$

Et pour la seconde branche acoustique qui suit approximativement la relation $\omega = u'_s q_{||}$, nous avons $\alpha = 3$ et nous obtenons :

$$C_v^{s'} = \frac{3\zeta(3)k_B^3 T^2}{\pi\hbar^2 u_s'^2 L} \equiv aT^2 \quad (3.19)$$

où nous avons $\zeta(3) = 1.202\dots$. Ces formules que nous venons d'obtenir nous fourniront des outils puissants pour vérifier la validité de nos résultats.

3.2.2 Calcul de chaleur spécifique

Ainsi en se rappelant que l'énergie $\hbar\omega$ qui provient de nos calculs de spectres est indépendante de la température, nous trouvons que dans la chaleur spécifique seule la fonction de distribution se trouve être dérivée par rapport à la température et nous écrivons donc :

$$C_v(T) = \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \frac{dq_z}{2\pi} \int \frac{d^2 q_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{\hbar^2 \omega^2(\mathbf{q})}{k_B T^2} \frac{e^{\hbar\omega(\mathbf{q})/k_B T}}{(e^{\hbar\omega(\mathbf{q})/k_B T} - 1)^2} \quad (3.20)$$

Pour le calcul numérique de C_v avec une relativement bonne approximation nous utiliserons la méthode de quadrature de Gauss. Cette méthode consiste à interpoler la fonction à intégrer sur un segment à l'aide de polynômes de Legendre, puis d'approcher la valeur de l'intégrale recherchée en intégrant ce polynôme. L'avantage de cette méthode est qu'elle transforme l'intégrale en une somme de points où la fonction est estimée correspondant aux racines du polynôme tout en donnant une très bonne approximation.

Pour commencer nous allons nous placer à température constante $T = 10^9$ K et nous allons étudier la contribution des modes collectifs à la chaleur spécifique pour les différents exemples de structures en « lasagnes » calculés à partir du modèle d'Avancini et al. [6].

Sur la figure 3.15 nous montrons de nouveau la même figure que présentée en introduction, figure 9, mais ici nous avons ajouté la contribution que nous venons de calculer dans le cadre noir. Le but ici est de nous montrer où se situe cette nouvelle contribution dans l'ensemble de la figure et de voir quelle est la tendance approximativement. Pour information la température correspond à une énergie $10^9 \text{K} = 86.17 k_B^{-1} \text{keV}$ et l'échelle de chaleur correspond à $10^{18} \text{ergK}^{-1} \text{cm}^{-3} = 7.246 \cdot 10^{-6} k_B \text{fm}^{-3}$.

La figure 3.16, qui suit, est en quelque sorte un agrandissement du cadre noir précédent, mais ici nous avons ajouté aussi la contribution du seul mode sonore existant ici, u_{m+} , calculé à l'aide de l'équation 3.18 pour une matière homogène à l'équilibre β en comparaison.

Sur cette figure sont donc représentées la contribution des électrons en tant que gaz de Fermi dégénéré ultra-relativiste en trait continue vert (en haut), puis juste en dessous vient la contribution des modes collectif en pointillés noir, en descendant encore un peu nous trouvons la contribution des paires de Cooper de neutrons en tirés bleu et enfin tout en bas en pointillé rouge se trouve la contribution du mode sonore pour une matière homogène à l'équilibre β . Il est tout à fait remarquable de voir ici que la contribution des modes collectifs vient restaurer celle des paires de neutrons faiblement appariés, qui en raison de la décroissance de leur contribution de la forme $e^{-\Delta/k_B T}$, sont bien en dessous des modes collectifs. La contribution des électrons reste elle dominante malgré tout à cette température.

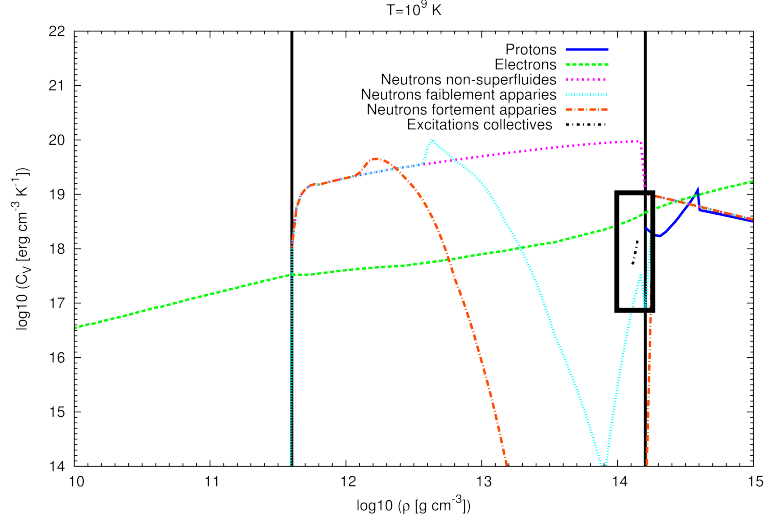


FIG. 3.15: Représentations des différentes contributions à la chaleur spécifique en fonction de la densité et à $T = 10^9$ K d'après Fortin et al. 2010 [44]. Le cadre noir permet de localiser la zone dans laquelle intervient la chaleur spécifique que nous venons de calculer.

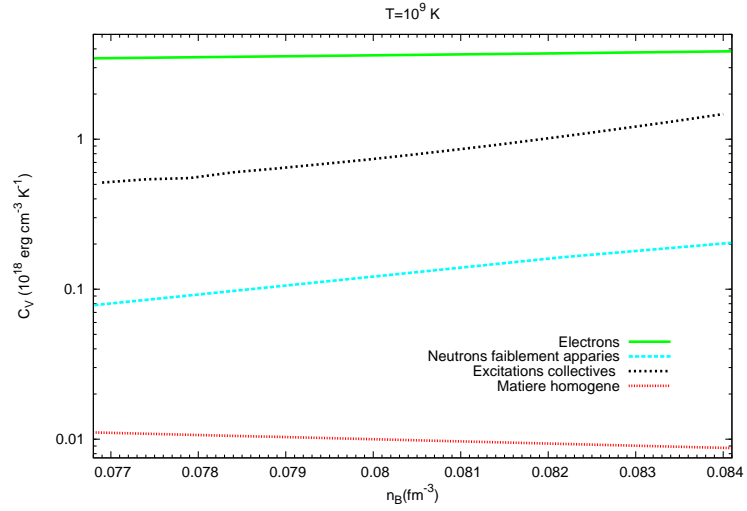


FIG. 3.16: Contributions à la chaleur spécifique des électrons, des excitations collectives, de neutrons faiblement appariés et du mode sonore pour une matière homogène à l'équilibre β , en fonction de la densité.

Et enfin nous pouvons conclure en première approche que ces modes collectifs ont leur contribution qui est essentiellement liée à la structuration de la matière puisque le mode sonore pour une matière homogène à l'équilibre β vient largement en dessous de toutes les autres contributions.

La figure 3.17 montre les différentes contributions à la chaleur spécifique des excitations collectives pour différents cas considérés précédemment. Le cas de référence, c'est-à-dire avec le jeu de conditions aux bords numéro 1 et avec l'interaction DDH δ , est représenté en trait continu (rouge), au dessus vient le cas utilisant la même interaction mais avec le jeu de conditions aux bords numéro 3 en pointillés, puis encore au-dessus vient le cas calculé sans entraînement en tirés (bleus) et enfin tout en haut en pointillés (magenta) vient le cas calculé pour l'interaction Sly4 avec le jeu de conditions aux bords numéro 1 et avec entraînement. Ce que nous pouvons constater sur cette figure est que le changement de conditions aux bords ou le retrait de l'entraînement ne font différer les courbes que de quelques pour-cent par rapport à la référence. Par contre, de manière surprenante nous trouvons que la contribution calculée avec l'interaction Sly4 est 2 à 3 fois supérieure au cas de référence alors que la pente u_s de la première branche acoustique est plus grande pour cette interaction. Sur les figures 3.12 nous remarquerons que la seconde branche acoustique a une pente u'_s bien inférieure au cas de référence, ce qui explique cette augmentation flagrante de la chaleur spécifique.

Nous allons maintenant prendre l'exemple de « lasagne » utilisé jusqu'à présent en référence à densité baryonique $n_B = 0.0800 \text{ fm}^{-3}$ présenté dans le tableau 3.1 et nous allons étudier la dépendance de la chaleur spécifique qui découle de son spectre d'excitation pour différentes températures comprises entre $T = 0.3 \cdot 10^9 \text{ K}$ et $T = 3.1 \cdot 10^9 \text{ K}$.

Sur la figure 3.18 sont représentées la dépendance en température de la contribution des excitations collectives pour les lasagnes à $n_B = 0.0800 \text{ fm}^{-3}$, ainsi que la courbe approchant la contribution des modes collectif calculés à partir des équations 3.18 et 3.19 pour des pentes moyennes $u_s = 0.0785 c$ et $u'_s = 0.0458 c$. Nous avons aussi donné la dépendance en température de la contribution du gaz dégénéré d'électrons ultra-relativistes qui est donné par :

$$C_v^{el.} = \frac{k_B^2 \mu_e^2 T}{3(\hbar c)^3} \quad (3.21)$$

en prenant $n_e = n_p$.

Tout d'abord nous trouvons que le calcul de chaleur spécifique suit de près la formule approché de type $aT^2 + bT^3$, ce qui conforte notre modèle d'intégration et qui nous indique surtout que ce sont les branches acoustiques, qui participent principalement à la chaleur spécifique, notamment celle ayant la pente $u'_s = 0.0458 c$, comme prévu.

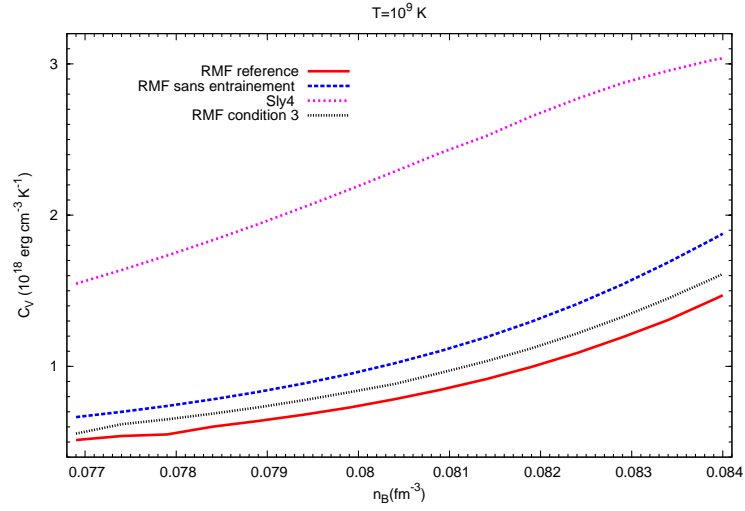


FIG. 3.17: Contributions à la chaleur spécifique des excitations collectives en fonction de la densité pour le cas de référence, pour le cas sans entrainement, pour le cas avec l'interaction de type SLy4 et enfin pour le cas avec le jeu de conditions aux bords 3 en fonction de la densité.

Ensuite le point remarquable est qu'à des températures raisonnables de quelques 10^9 K la contribution des modes collectifs devient supérieure à celle des électrons devenant ainsi la contribution dominante. Ainsi cette contribution des modes collectifs devra nécessairement être prise en compte par la suite dans les modèle d'évolution thermique des étoiles à neutrons, notamment sous sa forme $aT^2 + bT^3$ pour avoir une formulation simple du problème.

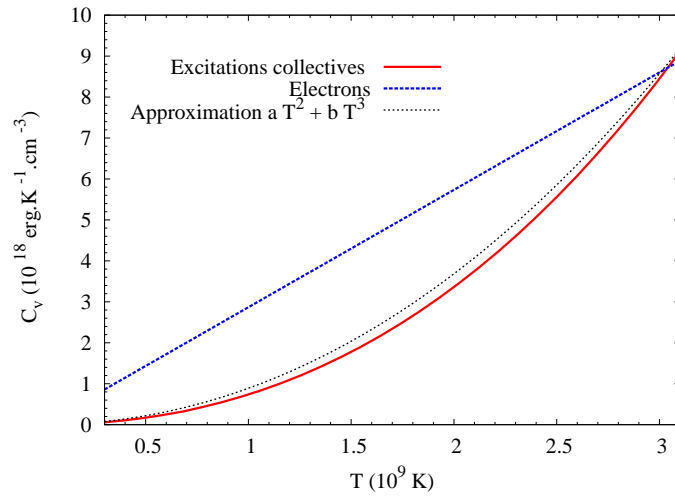


FIG. 3.18: Dépendance à la température de la contribution à la chaleur spécifique des excitations collectives (courbe continue rouge) et des électrons (courbe avec des tirés bleus) pour l'exemple de « lasagne » présenté précédemment. La formule approximative donnant la contribution des excitations collective est tracée en pointillés noirs. Les calculs ont été fait pour des « lasagnes » à densité baryonique $n_B = 0.0800 \text{ fm}^{-3}$ et pour une proportion moyenne de protons $Y_p = 0.2278$.

Conclusion et perspectives

« La plus magnifique leçon d’Astronomie populaire qui ait jamais été donnée au grand public est assurément l’expérience mémorable faite ici même il y a un demi-siècle par LÉON FOUCAULT. C’était la démonstration pratique, évidente, majestueuse, du mouvement de rotation de notre globe et l’affirmation grammaticale du titre de planète, ou “astre mobile”, pour le monde que nous habitons. Il y a là, en effet, dans cette expérience, une leçon astronomique, philosophique et sociale. »

Camille Flammarion, *Notice Scientifique sur le pendule du panthéon*
(1902)

Nous nous sommes intéressés à une forme d’excitation thermique dans la croûte interne des étoiles à neutrons non encore étudiée. En effet, jusqu’à présent dans cette partie de l’étoile, généralement deux formes d’excitations étaient considérées séparément. La première, correspond aux « vibrations » du réseau formé par les structures, alors que la seconde correspond aux ruptures des paires de Cooper de neutrons liés à leur échappement des noyaux. Mais, en réalité, il est clair que les structures et le gaz de neutrons échappés sont couplés et ainsi le réseau ne peut certainement pas « vibrer » sans interagir avec le gaz de neutrons, d’autant plus que les propriétés des superfluides de neutrons ne s’arrêtent pas aux simples ruptures des paires mais nous autorisent aussi à avoir une approche collective des excitations.

C’est donc avec ces idées que nous avons abordé cette étude. Ainsi, nous avons opté pour une approche hydrodynamique afin de simplifier le problème tout en prenant en compte les propriétés aussi bien microscopiques que macroscopiques qui sont essentielles à nos yeux, ce qui nous a conduit, non seulement à traiter des équations générales de l’hydrodynamique des superfluides à plusieurs composants mais aussi à mettre en œuvre l’interaction nucléaire à travers les calculs de paramètres hydrodynamiques tels que les potentiels chimiques ou l’entraînement.

Ainsi, nous avons appliqué ce formalisme à l’étude de ces structures bien particulières de la croûte interne que sont les phases « pasta ». À partir de là, en prenant quelques hypothèses simples, nous avons défini les conditions physiques dans les-

quelles est placée notre étude. Nous avons pour cela choisi de considérer que la matière serait composée de neutrons, protons et électrons dont les proportions sont fixées par l'équilibre β . Quelques considérations sur l'interaction nucléaire nous ont permis de développer notre modèle dans l'approximation de température nulle. D'autres hypothèses tout à fait raisonnables, telle que l'omission de la gravitation ou de l'interaction électrique, nous ont permis d'éliminer quelques sources de problèmes complexes. Et pour des raisons de simplicité aussi, nous nous sommes concentrés pour l'heure sur les structures en forme de plaques appelées « lasagnes ». Enfin, le problème des excitations collectives, à proprement parler, a été décrit en étudiant la propagation de perturbations par rapport à un équilibre hydrostatique dans ces structures. Ainsi, nous avons pu éliminer certains termes en considérant la localité et l'équilibre du système.

La représentation de ces structures, de même que le comportement de la matière aux interfaces, a été la source principale du problème théorique. Ainsi nous avons établi plusieurs jeux de conditions aux bords plus ou moins réalistes à des fins de vérification de notre modèle. Nous nous sommes, notamment, penchés sur deux catégories de conditions aux bords. La première, dite cinématique, nous a permis de réfléchir au comportement des superfluides. En effet, la formulation des équations pouvait nous conduire fondamentalement à considérer des interfaces distinctes pour les neutrons et pour les protons, ce que nous avons tenté d'éviter. Par ailleurs, intuitivement la présence des neutrons de part et d'autre des interfaces pouvait aussi nous conduire à envisager des passages de neutrons d'une phase à l'autre. Là aussi, nous avons pu formuler des équations de telle sorte que nous avons fait l'économie d'une telle hypothèse. L'autre catégorie de conditions aux bords, dites dynamiques, nous a fait réfléchir fondamentalement sur le phénomène de superfluidité et son origine quantique. En effet, nous avons évoqué les possibilités de sources de mouvements de fluides tout à fait particulières à l'hydrodynamique des superfluides. Dans le domaine de la mécanique des fluides classiques, le mouvement provient du gradient de pression non nul. Dans le cas des superfluides à plusieurs composants, chaque fluide peut se mouvoir quasi indépendamment et les équations hydrodynamiques laissent apparaître un gradient de potentiel chimique comme source de mouvement. Ainsi, à partir de ces considérations, nous avons formulé deux formes de conditions aux bords différentes qui ont été étudiées par la suite. Finalement, la fermeture du système d'équations linéaires s'est faite en prenant en compte la périodicité du milieu à travers le théorème de Floquet-Bloch.

La résolution des équations du problème nous a permis d'obtenir de nombreux résultats intéressants. Nous avons ainsi commencé cette partie concernant les résultats en nous fondant en particulier sur un exemple de plaques calculées par le groupe d'Avancini et de ses collaborateurs, issu du modèle présenté dans [6]. Nous avons surtout pris le jeu de conditions aux bords qui nous semblait le plus satis-

faisant physiquement. Dans ce cas, nous avons obtenu des spectres d'excitations remarquables au vue de l'objectif que nous nous étions fixé. Outre le fait que ces spectres sont tout à fait caractéristiques des milieux périodiques par l'apparition de nombreuses branches optiques, nous avons pu constater que deux branches acoustiques pouvaient exister selon l'angle de propagation de l'excitation. La première branche, celle qui reste à angle nul, a pu être « décortiquée » en prenant un modèle simple et nous avons pu expliqué la cause de sa pente à l'origine grâce à ce modèle. La seconde branche acoustique, n'apparaissant que pour des angles non nuls, a une pente à l'origine inférieure à la précédente et ne doit son existence qu'à la géométrie des structures considérée. Ce sont ces deux branches acoustiques qui ont joué un rôle capital dans le calcul des chaleurs spécifiques, puisque leurs pentes, de quelques centièmes de c , correspondent à des valeurs où elles contribuent particulièrement à cette quantité thermique. Par la suite, nous avons fait une étude paramétrique des spectres nous conduisant à exclure la plupart des autres jeux de conditions aux bords considérés et à voir que que la forme d'interaction joue un rôle important, notamment à travers les valeurs des vitesses du son, mais ne change pas fondamentalement la forme des spectres. Puis, nous avons remarqué que l'entraînement, caractéristique des superfluides à plusieurs constituants, n'avait presque pas d'influence sur les résultats. Et enfin, l'extrapolation aux autres structures, bien que hasardeuse en terme d'interprétation physique du modèle, nous a permis d'envisager que les structures voient leur contribution aux excitations thermiques augmenter en réduisant la densité baryonique moyenne.

Puis, pour terminer cette étude nous avons appliqué ces résultats à l'objet initial de ce projet, c'est-à-dire au calcul des chaleurs spécifiques. Après quelques considérations physiques nous conduisant à prendre une distribution bosonique pour ces excitations, nous avons calculé numériquement les quantités thermiques que nous cherchions. Et bien qu'attendu au regard des pentes à l'origine des branches acoustiques, mais ici nous l'avons quantifié, cette forme d'excitation collective est devenue l'une des contributions importantes, si ce n'est dominante selon le cas, à la chaleur spécifique. Ainsi, là où les neutrons voyaient leur contribution disparaître en raison du niveau élevé de l'énergie d'appariement par rapport à la température, cette forme d'excitation vient restaurer cette suppression. Il est désormais inévitable de considérer ces excitations collectives dans les calculs de propriétés thermiques des étoiles à neutrons. Pour l'heure, il n'est pas possible de déterminer si les résultats liés aux observations d'étoiles à neutrons fondés sur cette propriété de suppression de la contribution des neutrons seront invalidés. Néanmoins, il est certain qu'une étude dans ce sens s'impose afin de lever le doute, notamment parce que cette forme d'excitation devra remplacer à terme celle appelée « excitations des ions » dans cette partie de l'étoile. Mais pour cela, il faudra inclure dans le modèle l'interaction électrique et le gaz d'électrons dégénérés.

Cette tendance a été vérifiée pour les divers paramètres sur lesquels il était possible de jouer, notamment l'entraînement, les autres conditions aux bords ou la forme d'interaction.

Enfin une étude de dépendance à la température nous a conduit, non seulement à valider notre modèle du fait du bon ajustement de l'interpolation déduite de certaines considérations physiques aux chaleurs spécifiques calculées à partir des spectres d'excitations, mais aussi à constater qu'à partir de quelques 10^9 K, la contribution des excitations collectives pouvait dominer celle du gaz d'électrons.

En perspective, il semble que deux points pourraient être développés dans ce modèle. Premièrement, il est nécessaire d'introduire le gaz d'électrons dans ce modèle ainsi que son couplage avec les protons via l'interaction électrique. Cette étape se décompose en deux temps. Il faut d'abord calculer le champ électrique créé par la matière non neutre localement, puis prendre en compte comme constituant à part entière, les électrons. Ces derniers n'ont pas un comportement fluide comme les protons ou les neutrons, puisqu'ils sont fortement dégénérés et donneront naissance à un mode supplémentaire, qui peut être assimilé aux plasmons. Plusieurs travaux sur les couplages électrons-protons et les plasmons ont été fait dans ce sens pour la matière homogène [82, 11]. Il faudra par la suite déterminer comment les appliquer au cas des excitations collectives dans la matière structurée. Le deuxième point qui reste à développer est l'extension de ce modèle aux autres géométries. Pour cela, nous pourrions nous inspirer des travaux développés pour les structures cristallines à trois dimensions, tels que dans [20].

Une fois ces deux étapes accomplies, nous pourrions enfin remplacer la contribution appelée « excitations des ions » par celle que nous aurons obtenue. Et nous aurons à ce moment là les valeurs de la chaleur spécifique pour cette forme d'excitation calculée sur l'ensemble de la croûte interne.

Cette étape sera le début des études d'effet sur l'évolution thermique, car ces chaleurs spécifiques, qui sont très bien ajustées par l'interpolation, pourront être introduites dans des codes d'évolutions thermique d'étoiles à neutrons, tel que celui développé par Dany Page [76]. Ainsi, nous pourrions quantifier à quel point les courbes d'évolution thermique changent avec cette nouvelle forme d'excitation thermique.

En guise de raffinement du modèle, il sera possible à ce moment là d'introduire une température non nulle pour l'ensemble du modèle. Ceci impliquera, non seulement l'introduction d'un fluide dit « normal » dans l'hydrodynamique, mais aussi fera changer les caractéristiques des structures en fonction de leur température.

Ainsi, l'étude des excitations collectives dans la croûte interne des étoiles à neutrons n'en est qu'à un stade exploratoire et recèle des perspectives extrêmement prometteuses.

« [...] l'homme sage doit toujours s'engager dans les voies frayées par des grands hommes [...] ; et faire comme les archers avisés qui, connaissant la force de leur arc, si le but qu'ils veulent frapper leur paraît trop éloigné, prennent leur visée beaucoup plus haut que le lieu fixé, non pour que leur flèche parvienne à une telle hauteur, mais pour que cette visée si haute leur permette d'atteindre le point désigné. »

Machiavel, *Le Prince* (1532)

Bibliographie

- [1] A. S. Alexandrov. *Theory of Superconductivity : From Weak to Strong Coupling*. Bristol : IOP Publ., 2003.
- [2] P. W. Anderson and N. Itoh. Pulsar glitches and restlessness as a hard superfluidity phenomenon. *Nature*, 256 :25–27, July 1975.
- [3] N. Andersson and G. L. Comer. A flux-conservative formalism for convective and dissipative multi-fluid systems, with application to newtonian superfluid neutron stars. *Classical and Quantum Gravity*, 23 :5505–5529, September 2006.
- [4] A. F. Andreev and E. P. Bashkin. Three-velocity hydrodynamics of superfluid solutions. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 42 :164–+, July 1975.
- [5] S. S. Avancini, L. Brito, Ph. Chomaz, D. P. Menezes, and C. Providência. Spinodal instabilities and the distillation effect in relativistic hadronic models. *Phys. Rev. C*, 74 :024317, Aug 2006.
- [6] S. S. Avancini, L. Brito, J. R. Marinelli, D. P. Menezes, M. M. W. de Moraes, C. Providência, and A. M. Santos. Nuclear “pasta” phase within density dependent hadronic models. *Phys. Rev. C*, 79(3) :035804, Mar 2009.
- [7] S. S. Avancini, L. Brito, D. P. Menezes, and C. Providência. Instabilities in asymmetric nuclear matter. *Phys. Rev. C*, 70(1) :015203–+, July 2004.
- [8] S. S. Avancini, S. Chiacchiera, D. P. Menezes, and C. Providência. Warm “pasta” phase in the Thomas-Fermi approximation. *Phys. Rev. C*, 82(5) :055807–+, November 2010.
- [9] S. S. Avancini, D. P. Menezes, M. D. Alloy, J. R. Marinelli, M. M. W. Moraes, and C. Providência. Warm and cold pasta phase in relativistic mean field theory. *Phys. Rev. C*, 78(1) :015802, Jul 2008.
- [10] W. Baade and F. Zwicky. Cosmic Rays from Super-novae. *Proceedings of the National Academy of Science*, 20 :259–263, May 1934.
- [11] M. Baldo and C. Ducoin. Elementary excitations in homogeneous neutron star matter. *Phys. Rev. C*, 79(3) :035801, Mar 2009.

- [12] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer. Theory of Superconductivity. *Physical Review*, 108 :1175–1204, December 1957.
- [13] G. Baym and C. Pethick. *Landau Fermi-Liquid Theory : Concepts and Applications*. John Wiley & Sons Inc., 1991.
- [14] M. Bender, P.-H. Heenen, and P.-G. Reinhard. Self-consistent mean-field models for nuclear structure. *Reviews of Modern Physics*, 75 :121–180, January 2003.
- [15] H. Bethe. Zur Theorie des Durchgangs schneller Korpuskularstrahlen durch Materie. *Annalen der Physik*, 397 :325–400, 1930.
- [16] H. A. Bethe. Energy Production in Stars. *Physical Review*, 55 :103–103, January 1939.
- [17] D. Blaschke, H. Grigorian, D. N. Voskresensky, and F. Weber. On the Cooling of the Neutron Star in Cassiopeia A. *ArXiv e-prints*, August 2011.
- [18] M. Borumand, R. Joynt, and W. Kluźniak. Superfluid densities in neutron-star matter. *Phys. Rev. C*, 54 :2745–2750, November 1996.
- [19] L. M. Brekhovskikh. *Waves in Layered Media*. Academic Press, 1980.
- [20] L. Brillouin and M. Parodi. *Propagation des ondes dans les milieux périodiques*. Masson, 1956.
- [21] E. F. Brown and A. Cumming. Mapping Crustal Heating with the Cooling Light Curves of Quasi-Persistent Transients. *Astrophysical Journal*, 698 :1020–1032, June 2009.
- [22] A. G. Cameron. Neutron Star Models. *Astrophysical Journal*, 130 :884–+, November 1959.
- [23] B. Carter, N. Chamel, and P. Haensel. Effect of BCS pairing on entrainment in neutron superfluid current in neutron star crust. *Nuclear Physics A*, 759 :441–464, September 2005.
- [24] B. Carter, N. Chamel, and P. Haensel. Entrainment Coefficient and Effective Mass for Conduction Neutrons in Neutron Star Crust : Macroscopic Treatment. *International Journal of Modern Physics D*, 15 :777–803, 2006.
- [25] B. Carter and I. M. Khalatnikov. Equivalence of convective and potential variational derivations of covariant superfluid dynamics. *Phys. Rev. D*, 45 :4536–4544, June 1992.
- [26] B. Carter and D. Langlois. Relativistic models for superconducting-superfluid mixtures. *Nuclear Physics B*, 531 :478–504, October 1998.
- [27] E. Chabanat, P. Bonche, P. Haensel, J. Meyer, and R. Schaeffer. New Skyrme effective forces for supernovae and neutron rich nuclei. *Physica Scripta Volume T*, 56 :231–233, 1995.

- [28] E. Chabanat, P. Bonche, P. Haensel, J. Meyer, and R. Schaeffer. A Skyrme parametrization from subnuclear to neutron star densities. *Nuclear Physics A*, 627 :710–746, February 1997.
- [29] E. Chabanat, P. Bonche, P. Haensel, J. Meyer, and R. Schaeffer. A Skyrme parametrization from subnuclear to neutron star densities Part II. Nuclei far from stabilities. *Nuclear Physics A*, 635 :231–256, May 1998.
- [30] E. Chabanat, P. Bonche, P. Haensel, J. Meyer, and R. Schaeffer. Erratum to “A Skyrme parametrization from subnuclear to neutron star densities. (II) : Nuclei far from stabilities” [Nucl. Phys. A 635 (1998) 231-256]. *Nuclear Physics A*, 643 :441–441, December 1998.
- [31] J. Chadwick. Possible Existence of a Neutron. *Nature*, 129 :312–+, February 1932.
- [32] N. Chamel and P. Haensel. Entrainment parameters in a cold superfluid neutron star core. *Phys. Rev. C*, 73(4) :045802, Apr 2006.
- [33] N. Chamel and P. Haensel. Physics of Neutron Star Crusts. *Living Reviews in Relativity*, 11 :10–+, December 2008.
- [34] Nicolas Chamel. *Entrainement dans l’écorce d’une étoile à neutrons*. PhD thesis, Université Paris VI, 2004.
- [35] S. Chandrasekhar. The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs. *Astrophysical Journal*, 74 :81–+, July 1931.
- [36] A. R. Choudhuri. *The physics of fluids and plasmas : an introduction for astrophysicists* /. December 1998.
- [37] V. Cirigliano, S. Reddy, and R. Sharma. A low energy theory for superfluid and solid matter and its application to the neutron star crust. *ArXiv e-prints*, February 2011.
- [38] Luc Di Gallo, Micaela Oertel, and Michael Urban. Collective excitations in the neutron star inner crust. *Phys. Rev. C*, 84 :045801, Oct 2011.
- [39] J. Dobaczewski and J. Dudek. Time-odd components in the mean field of rotating superdeformed nuclei. *Phys. Rev. C*, 52 :1827–1839, October 1995.
- [40] C. Ducoin, J. Margueron, and P. Chomaz. Cluster formation in asymmetric nuclear matter : Semi-classical and quantal approaches. *Nuclear Physics A*, 809 :30–64, August 2008.
- [41] E. Esclangon. *Dix leçon d’astronomie*. Gauthier Villars, 1934.
- [42] A. L. Fetter and J. D. Walecka. *Quantum theory of many-particle systems*. 1971.
- [43] G. Floquet. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. *Annales scientifiques de l’Ecole Normale Supérieure*, 12 :47–88, 1883.

- [44] M. Fortin, F. Grill, J. Margueron, D. Page, and N. Sandulescu. Thermalization time and specific heat of the neutron stars crust. *Phys. Rev. C*, 82(6) :065804–+, December 2010.
- [45] T. Gaitanos, M. di Toro, S. Typel, V. Baran, C. Fuchs, V. Greco, and H. H. Wolter. On the Lorentz structure of the symmetry energy. *Nuclear Physics A*, 732 :24–48, February 2004.
- [46] G. Gamow. The Quantum Theory of Nuclear Disintegration. *Nature*, 122 :805–806, November 1928.
- [47] N. K. Glendenning. Neutron stars are giant hypernuclei? *Astrophysical Journal*, 293 :470–493, June 1985.
- [48] N. K. Glendenning, editor. *Compact stars. Nuclear physics, particle physics, and general relativity*. 1997.
- [49] P. Gögelein, E. N. E. van Dalen, C. Fuchs, and H. Mütter. Nuclear matter in the crust of neutron stars derived from realistic NN interactions. *Phys. Rev. C*, 77(2) :025802–+, February 2008.
- [50] T. Gold. Rotating Neutron Stars as the Origin of the Pulsating Radio Sources. *Nature*, 218 :731–732, May 1968.
- [51] M. E. Gusakov and P. Haensel. The entrainment matrix of a superfluid neutron proton mixture at a finite temperature. *Nuclear Physics A*, 761 :333–348, November 2005.
- [52] M. E. Gusakov, A. D. Kaminker, D. G. Yakovlev, and O. Y. Gnedin. Enhanced cooling of neutron stars via Cooper-pairing neutrino emission. *Astronomy and Astrophysics*, 423 :1063–1071, September 2004.
- [53] M. E. Gusakov, E. M. Kantor, and P. Haensel. Relativistic entrainment matrix of a superfluid nucleon-hyperon mixture : The zero temperature limit. *Phys. Rev. C*, 79(5) :055806–+, May 2009.
- [54] M. Hashimoto, H. Seki, and M. Yamada. Shape of nuclei in the crust of a neutron star. *Progress of Theoretical Physics*, 71 :320–326, February 1984.
- [55] C. O. Heinke and W. C. G. Ho. Direct Observation of the Cooling of the Cassiopeia A Neutron Star. *Astrophysical Journal*, 719 :L167–L171, August 2010.
- [56] A. Hewish, S. J. Bell, J. D. H. Pilkington, P. F. Scott, and R. A. Collins. Observation of a Rapidly Pulsating Radio Source. *Nature*, 217 :709–713, February 1968.
- [57] P. Hohenberg and W. Kohn. Inhomogeneous Electron Gas. *Physical Review*, 136 :864–871, November 1964.
- [58] P. Kapitza. Viscosity of Liquid Helium below the λ -Point. *Nature*, 141 :74–+, January 1938.

- [59] W. Kohn and L. J. Sham. Self-Consistent Equations Including Exchange and Correlation Effects. *Physical Review*, 140 :1133–1138, November 1965.
- [60] J. P. Laheurte, G. A. Williams, H. Dandache, and M. Zoaeter. Boundary conditions at the liquid-vapor interface of superfluid ^3He - ^4He mixtures. *Phys. Rev. B*, 28 :6585–6588, December 1983.
- [61] G. A. Lalazissis, J. König, and P. Ring. New parametrization for the Lagrangian density of relativistic mean field theory. *Phys. Rev. C*, 55 :540–543, January 1997.
- [62] L. D. Landau and E. M. Lifchitz. *Fluid mechanics*. Pergamon Press, 1959.
- [63] L. D. Landau and E. M. Lifchitz. *Statistical Physics Part 1*. Pergamon Press, 1967.
- [64] R. M. Langer and N. Rosen. The Neutron. *Physical Review*, 37 :1579–1582, June 1931.
- [65] J. M. Lattimer, C. J. Pethick, D. G. Ravenhall, and D. Q. Lamb. Physical properties of hot, dense matter : The general case. *Nuclear Physics A*, 432 :646–742, January 1985.
- [66] J. M. Lattimer and M. Prakash. Neutron Star Structure and the Equation of State. *Astrophysical Journal*, 550 :426–442, March 2001.
- [67] A. J. Leggett. *Quantum Liquids, Bose condensation and Cooper pairing in condensed-matter systems*. Oxford University Press, 2006.
- [68] E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii. *Statistical physics. Part 2*. Pergamon Press, 1980.
- [69] I. G. Main. *Vibrations and waves in physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1978.
- [70] A. Migdal. Superfluidity and the moments of inertia of nuclei. *Nuclear Physics*, 13 :655–674, November 1959.
- [71] K. Nakazato, K. Oyamatsu, and S. Yamada. Gyroid Phase in Nuclear Pasta. *Physical Review Letters*, 103(13) :132501–+, September 2009.
- [72] G. Nimtz. On Virtual Phonons, Photons, and Electrons. *Foundations of Physics*, 39 :1346–1355, December 2009.
- [73] A. Nodon. *Elément d’astrophysique : Introduction à l’étude de l’énergétique solaire et stellaire*. Albert Blanchard, 1926.
- [74] J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff. On Massive Neutron Cores. *Physical Review*, 55 :374–381, February 1939.
- [75] K. Oyamatsu. Nuclear shapes in the inner crust of a neutron star. *Nuclear Physics A*, 561 :431–452, August 1993.

- [76] D. Page. Thermal Evolution of Isolated Neutron Stars. *ArXiv :astro-ph/9802171*, June 1997.
- [77] D. Page, M. Prakash, J. M. Lattimer, and A. W. Steiner. Rapid Cooling of the Neutron Star in Cassiopeia A Triggered by Neutron Superfluidity in Dense Matter. *Physical Review Letters*, 106(8) :081101–+, February 2011.
- [78] C. J. Pethick, N. Chamel, and S. Reddy. Superfluid Dynamics in Neutron Star Crusts. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 186 :9–16, 2010.
- [79] C. J. Pethick and D. G. Ravenhall. Matter at large neutron excess and the physics of neutron-star crusts. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 45 :429–484, 1995.
- [80] R. Prix. Variational description of multifluid hydrodynamics : Uncharged fluids. *Phys. Rev. D*, 69(4) :043001–+, February 2004.
- [81] Reinhard Prix. *Aspects de l’hydrodynamique superfluide des étoiles à neutrons*. PhD thesis, Université Paris XI, 2000.
- [82] C. Providência, L. Brito, A. M. S. Santos, D. P. Menezes, and S. S. Avancini. Coupling of nuclear and electron modes in relativistic stellar matter. *Phys. Rev. C*, 74(4) :045802–+, October 2006.
- [83] S. Putterman, D. Heckerman, R. Rosenbaum, and G. A. Williams. Superfluid Two-Phase Sound. *Physical Review Letters*, 42 :580–583, February 1979.
- [84] D. G. Ravenhall, C. J. Pethick, and J. R. Wilson. Structure of Matter below Nuclear Saturation Density. *Physical Review Letters*, 50 :2066–2069, June 1983.
- [85] P. Ring. Relativistic mean field theory in finite nuclei. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 37 :193–263, 1996.
- [86] P. Ring and P. Schuck. *The Nuclear Many-Body Problem*. Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [87] E. Rutherford. Bakerian Lecture. Nuclear Constitution of Atoms. *Royal Society of London Proceedings Series A*, 97 :374–400, July 1920.
- [88] C. Sauty. Notes de cours : Fluid Approximation and Conservation Laws, 2008.
- [89] P. S. Shternin, D. G. Yakovlev, C. O. Heinke, W. C. G. Ho, and D. J. Patnaude. Cooling neutron star in the Cassiopeia A supernova remnant : evidence for superfluidity in the core. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 412 :L108–L112, March 2011.
- [90] O. Sjöberg. On the Landau effective mass in asymmetric nuclear matter. *Nuclear Physics A*, 265 :511–516, July 1976.

- [91] T. Skyrme. The effective nuclear potential. *Nuclear Physics A*, 9 :615–634, 1959.
- [92] A. A. Stahlhofen and G. Nimtz. Evanescent modes are virtual photons. *Europhysics Letters*, 76 :189–195, October 2006.
- [93] A. W. Steiner, J. M. Lattimer, and E. F. Brown. The Equation of State from Observed Masses and Radii of Neutron Stars. *Astrophysical Journal*, 722 :33–54, October 2010.
- [94] H. Steinwedel, J. H. Jensen, and P. Jensen. Nuclear Dipole Vibrations. *Physical Review*, 79 :1019–1019, September 1950.
- [95] K. S. Thorne and A. N. Zytlow. Stars with degenerate neutron cores. I - Structure of equilibrium models. *Astrophysical Journal*, 212 :832–858, March 1977.
- [96] R. C. Tolman. Static Solutions of Einstein’s Field Equations for Spheres of Fluid. *Physical Review*, 55 :364–373, February 1939.
- [97] I. Tolstoy. *Wave Propagation*. McGraw-Hill Inc., New York, 1973.
- [98] G. Tonini, F. Werner, and Y. Castin. Formation of a vortex lattice in a rotating BCS Fermi gas. *European Physical Journal D*, 39 :283–294, August 2006.
- [99] S. Typel and H. H. Wolter. Relativistic mean field calculations with density-dependent meson-nucleon coupling. *Nuclear Physics A*, 656 :331–364, September 1999.
- [100] M. Urban and P. Schuck. Dynamics of a trapped Fermi gas in the BCS phase. *Phys. Rev. A*, 73(1) :013621–+, January 2006.
- [101] G. Watanabe, K. Iida, and K. Sato. Thermodynamic properties of nuclear “pasta” in neutron star crusts. *Nuclear Physics A*, 676 :455–473, August 2000.
- [102] G. Watanabe, K. Sato, K. Yasuoka, and T. Ebisuzaki. Structure of cold nuclear matter at subnuclear densities by quantum molecular dynamics. *Phys. Rev. C*, 68(3) :035806, Sep 2003.
- [103] C. F. V. Weizsäcker. Zur Theorie der Kernmassen. *Zeitschrift für Physik*, 96 :431–458, July 1935.
- [104] G. A. Williams, R. Rosenbaum, H. Eaton, and S. Putterman. Two-phase sound in superfluid ^3He - ^4He mixtures. *Physics Letters A*, 72 :356–358, July 1979.
- [105] H. G. Winful. Tunneling time, the Hartman effect, and superluminality : A proposed resolution of an old paradox. *Physics Reports*, 436 :1–69, December 2006.

- [106] D. G. Yakovlev, K. P. Levenfish, and Y. A. Shibano. REVIEWS OF TOPICAL PROBLEMS : Cooling of neutron stars and superfluidity in their cores. *Physics Uspekhi*, 42 :737–778, August 1999.